

Remarque : Dans tout le cours, (O, I, J) est un repère orthogonal.

L'Equation réduite d'une droite

Définition

❖ a et b deux nombres réels fixes.

L'ensemble des points $M(x; y)$ tels que : $y = ax + b$ est une droite.

L'équation $y = ax + b$ est appelé l'équation réduite d'une droite (d) . on note $(d) : y = ax + b$

❖ Le réel a est appelé le coefficient directeur (ou la pente) de la droite (d) .

❖ Le réel b est appelé l'ordonnée à l'origine. (ordonnée du point d'intersection de (d) et l'axe des ordonnées).

Exemples

❖ On considère la droite (d) d'équation : $y = 3x - 2$ alors 3 est le coefficient directeur de la droite (d) et -2 est l'ordonnée à l'origine. ($y = 3x + (-2)$)

❖ On considère la droite (D) d'équation : $y = -x$ alors -1 est le coefficient directeur de la droite (D) et 0 est l'ordonnée à l'origine. ($y = -1x + 0$)

❖ L'équation $y = 5x^2 + 3$, ce n'est pas une équation d'une droite.

Remarques

❖ Un point appartient à une droite si seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite.

❖ Soient $(d) : y = ax + b$ et si $A(x_A, y_A)$ appartient à (d) alors : $y_A = ax_A + b$.

❖ Pour tracer une droite il suffit de tracer deux points dont les coordonnées vérifient l'équation de cette droite.

Applications

1- Soit la droite (d) d'équation $y = \frac{5}{6}x - 2$. les points $E(5; 2)$ et $F(-6; -7)$ appartient-ils à la droite (d)

Solution

❖ on a $y_E = 2$ et $\frac{5}{6}x_E - 2 = \frac{5}{6} \times 5 - 2 = \frac{25}{6} - \frac{12}{6} = \frac{25-12}{6} = \frac{13}{6}$. comme $y_E \neq \frac{5}{6}x_E - 2$ alors le point E n'appartient pas à la droite (d) .

❖ On a $y_F = -7$ et $\frac{5}{6}x_F - 2 = \frac{5}{6} \times (-6) - 2 = -5 - 2 = -7$. Comme $y_F = \frac{5}{6}x_F - 2$ alors le point F appartient à la droite (d) .

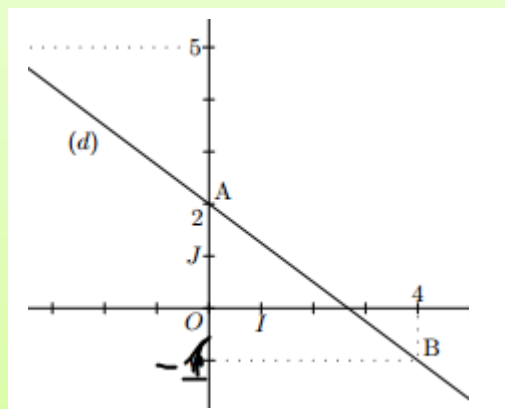
2- Tracer la droite (d) d'équation $y = \frac{-3}{4}x + 2$

Solution

Soit A le point de (d) d'abscisse $x_A = 0$ alors y_A correspond à l'ordonnée à l'origine, d'où $y_A = 2$

Soit B le point de (d) d'abscisse $x_B = 4$ alors $y_B = \frac{-3}{4}x_B + 2 = \frac{-3}{4} \times 4 + 2 = -3 + 2 = -1$, d'où $y_B = -1$

Finalement la droite (d) passe par les deux points $A(0; 2)$ et $B(4; -1)$



propriété

- ❖ Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points tel que $x_A \neq x_B$ alors le coefficient directeur de la droite (AB) est :
- ❖ $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. (ou $a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$)

Exemple

- ❖ Soient $A(1,3)$ et $B(2,10)$ deux points dans le plan rapporté à une repère alors le coefficient directeur (la pente) de la droite (AB) est : $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{10-3}{2-1} = \frac{7}{1} = 7$.
- ❖ L'équation réduite de la droite (AB) s'écrit sous la forme (AB): $y = 7x + b$
- ❖ Pour déterminer b on sait que $A(1,3)$ appartient à la droite (AB) alors $y_A = 7x_A + b$. on remplace y_A par 3 et x_A par 1 . on trouve l'équation $3 = 7 \times 1 + b$ d'où $3-7=b$. finalement $b = -4$
(AB): $y = 7x - 4$
- ❖ **Remarque** : pour déterminer b on peut utiliser le point B au lieu d'utiliser le point A . (utiliser les coordonnées de B est vérifier que $b = -4$)

2- Droites parallèles et droites perpendiculaires

Propriétés

Soient (d) et (d') deux droites obliques d'équations (d): $y = ax + b$ et (d') : $y = a'x + b'$.

- Si $a = a'$ alors les deux droites sont parallèles ((d) // (d')) .
- si les deux droites (d) et (d') sont parallèles ((d) // (d')) alors ils ont même coefficient directeur ($a=a'$).
- si $a \times a' = -1$ alors les deux droites (d) et (d') sont perpendiculaires ((d) \perp (d')).
- Si les deux droites (d) et (d') sont perpendiculaires ((d) \perp (d')) alors $a \times a' = -1$

Exemples

1- $A(6;1), B(8;3), C(12;-1)$ et $D(9;-4)$ quatre points du plan rapporté à une repère

- Calculons les coefficients directeurs des droites (AB) , (BC) et (DC). puis déduire que (AB)//(DC) et (AB) \perp (BC)

▪ **Réponse** : on note a , a' et a'' respectives les coefficients directeurs des droites (AB) , (BC) et (DC) alors :

$$\text{➤ } a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{8-6} = \frac{2}{2} = 1 ; a' = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-1-3}{12-8} = \frac{-4}{4} = -1 \text{ et } a'' = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{-1-(-4)}{12-9} = \frac{-1+4}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

➤ comme $a = a''$ alors (AB)//(DC) et comme $a \times a' = 1 \times (-1) = -1$ alors (AB) \perp (BC)

2- On se place dans un repère orthonormé (O; I; J). on considère les points $A(-4; 2)$; $B(4; 8)$ et $C(7; 4)$.

a- Déterminer l'équation réduite de la droite (AB)

- ❖ La droite (AB) étant oblique alors son équation réduite peut s'écrire sous la forme : $y = ax + b$

Déterminons a .

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8 - 2}{4 - (-4)} = \frac{6}{4 + 4} = \frac{6}{8} \\ = \frac{2 \times 3}{2 \times 4} = \frac{3}{4}$$

Déterminons b.

$$\begin{array}{l} \text{(AB): } y = \frac{3}{4}x + b \\ y_B = \frac{3}{4}x_B + b \\ 8 = \frac{3}{4} \times 4 + b \end{array} \quad \begin{array}{l} 8=3+b \\ 8-3=b \\ 5=b \end{array}$$

Finalement l'équation réduite de la droite (AB) est : $y = \frac{3}{4}x + 5$

b- Déterminer l'équation réduite de la droite (d) qui passe par le point C et qui est parallèle à (AB)

- ❖ La droite (d) étant oblique alors son équation réduite peut s'écrire sous la forme : $y = mx + p$

Déterminons m : (d) étant parallèle à (AB) alors

$$m = a = \frac{3}{4}$$

L'équation réduite de la droite (d) : $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$

Déterminons p : le point C appartient à la droite (d) alors :

$$\begin{array}{l} y_C = \frac{3}{4}x_C + p \\ 4 = \frac{3}{4} \times 7 + p \\ 4 = \frac{21}{4} + p \end{array} \quad \begin{array}{l} 4 - \frac{21}{4} = p \\ \frac{16 - 21}{4} = p \\ p = \frac{-5}{4} \end{array}$$

C- Déterminons l'équation réduite de la droite (d') qui passe par le point B et qui est perpendiculaire à (AB)

❖ La droite (d') étant oblique alors son équation réduite peut s'écrire sous la forme $y = a'x + b'$

Déterminons a'

(d') \perp (AB) alors $a' \times a = -1$

$$a' \times \frac{3}{4} = -1$$

$$\frac{a' \times \frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{-1}{\frac{3}{4}}$$

$$a' = \frac{-4}{3}$$

Déterminons b' : (d') passe par le point B alors :

$$y_B = \frac{-4}{3}x_B + b'$$

$$8 = \frac{-4}{3} \times 4 + b'$$

$$8 = \frac{-16}{3} + b'$$

$$8 + \frac{16}{3} = b'$$

$$\frac{24}{3} + \frac{16}{3} = b'$$

$$\frac{24 + 16}{3} = b'$$

$$b' = \frac{40}{3}$$

L'équation réduite de la droite (d') est : $y = \frac{-4}{3}x + \frac{40}{3}$

d-déterminons l'équation réduite de la droite (OC).

❖ La droite (OC) par O alors l'ordonnée du point d'intersection de la droite (OC) et l'axe des ordonnées est 0 d'où $b=0$

$$a = \frac{y_C - y_O}{x_C - x_O} = \frac{4 - 0}{7 - 0} = \frac{4}{7}$$

L'équation réduite de la droite (OC) est : $y = \frac{4}{7}x$

3- cas particulier

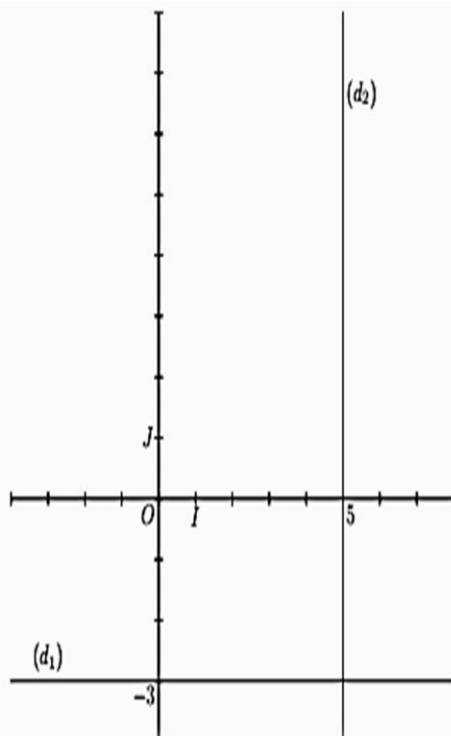
L'équation réduite d'une droite parallèle à l'axe des abscisses

❖ L'équation réduite d'une droite parallèle à l'axe des abscisses, est de la forme : $y=b$. (b étant l'ordonnée commune à tous les points de cette droite).

L'équation réduite d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées

❖ L'équation réduite d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées, est de la forme : $x=a$. (a étant l'abscisse commune à tous les points de cette droite).

Exemple



Sur le dessin ci-contre, on a dessiné deux droites (d_1) et (d_2).

La droite horizontale (d_1) contient tous les points dont les ordonnées sont égales à -3 .

C'est pourquoi, l'équation de la droite (d_1) est $y = -3$.

La droite verticale (d_2) contient tous les points dont les abscisses sont égales à 5 .

C'est pourquoi, l'équation de la droite (d_2) est $x = 5$.

NB : ne pas confondre les abscisses avec les ordonnées.