

|              |                 |
|--------------|-----------------|
| <b>NOM :</b> | <b>PRENOM :</b> |
|--------------|-----------------|

|                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|
| <b>Centre d'écrit :</b> | <b>N° Inscription :</b> |
|-------------------------|-------------------------|

## SUJET DE MATHÉMATIQUES

### Série STI2D et STL

**Mercredi 15 mai 2013**

**Epreuves Geipi Polytech**

Nous vous conseillons de répartir équitablement les 3 heures d'épreuves entre les sujets de mathématiques et de physique-chimie.

La durée conseillée de ce sujet de mathématiques est de 1h30.

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit.

Aucun document n'est autorisé.

L'usage du téléphone est interdit.

**Vous ne devez traiter que 3 exercices parmi les 4 proposés.**

Chaque exercice est noté sur 20 points. Le sujet est donc noté sur 60 points.

Si vous traitez les 4 exercices, seules seront retenues les 3 meilleures notes.

Ne rien inscrire  
ci-dessous

|          |  |
|----------|--|
| <b>1</b> |  |
| <b>2</b> |  |
| <b>3</b> |  |
| <b>4</b> |  |

**TOTAL**

|  |
|--|
|  |
|--|

Le sujet comporte 8 pages numérotées de 2 à 9

Il faut choisir et réaliser seulement trois des quatre exercices proposés

### EXERCICE I

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 3

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Dans une entreprise qui fabrique des tables en bois, plusieurs études sont faites.

Dans les parties A et B, pour chaque probabilité demandée, on donnera une valeur approchée à  $10^{-3}$  près.

#### Partie A

L'entreprise utilise un lot de **12** planches en bois pour la fabrication de chaque table.

Une planche est dite fragilisée quand elle présente un noeud dans le bois. La probabilité qu'une planche soit fragilisée est de **0,05**.

On note  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de planches fragilisées d'un lot de **12** planches choisi au hasard pour la fabrication d'une table.

- I-A-1-**  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ . Donner les valeurs de  $n$  et  $p$ .
- I-A-2-** Donner la probabilité  $P_1$  que le lot ne comporte aucune planche fragilisée.
- I-A-3-** Donner la probabilité  $P_2$  que le lot comporte une seule planche fragilisée.
- I-A-4-** Donner la probabilité  $\mathbb{P}(X \geq 2)$  que le lot comporte au moins deux planches fragilisées.

#### Partie B

Les planches utilisées pour la fabrication des tables sont débitées par une machine réglée pour produire des planches d'une longueur de **980** millimètres.

La longueur, en millimètres, d'une planche prise au hasard à la sortie de la machine est modélisée par une variable aléatoire  $L$  qui suit une loi normale d'espérance **980** et d'écart-type **2**.

- I-B-1-** Donner la probabilité  $\mathbb{P}(978 \leq L \leq 982)$  que la longueur de la planche soit comprise entre **978** et **982** millimètres.
- I-B-2-** Donner la probabilité  $\mathbb{P}(L \leq 978)$  que la planche mesure moins de **978** millimètres.
- I-B-3-** Donner la probabilité  $\mathbb{P}(L \geq 982)$  que la planche mesure plus de **982** millimètres.

#### Partie C

Toutes les tables sont peintes avant d'être mises en vente. Mais elles peuvent présenter un défaut de peinture sur le plateau ou sur les pieds de table.

On considère que **3%** des tables mises en vente présentent un défaut de peinture sur le plateau, **4%** présentent un défaut de peinture au niveau des pieds et **2%** présentent les deux défauts à la fois. On choisit au hasard une table peinte parmi les tables mises en vente.

- I-C-1-** Compléter le tableau avec les différents pourcentages.
- I-C-2-** Donner la probabilité  $P_3$  que la table ne présente aucun défaut de peinture.
- I-C-3-** Donner la probabilité  $P_4$  que la table présente au moins un défaut de peinture.

REPONSES A L'EXERCICE I

| I-A-1-                      | $n =$  | $p =$                        |            |   |                       |                              |       |                      |  |  |  |                             |  |  |  |       |  |  |            |
|-----------------------------|--|------------------------------|------------|---|-----------------------|------------------------------|-------|----------------------|--|--|--|-----------------------------|--|--|--|-------|--|--|------------|
| I-A-2-                      | $P_1 \simeq$   |                              |            |   |                       |                              |       |                      |  |  |  |                             |  |  |  |       |  |  |            |
| I-A-3-                      | $P_2 \simeq$   |                              |            |   |                       |                              |       |                      |  |  |  |                             |  |  |  |       |  |  |            |
| I-A-4-                      | $\mathbb{P}(X \geq 2) \simeq$  |                              |            |   |                       |                              |       |                      |  |  |  |                             |  |  |  |       |  |  |            |
| I-B-1-                      | $\mathbb{P}(978 \leq L \leq 982) \simeq$   |                              |            |   |                       |                              |       |                      |  |  |  |                             |  |  |  |       |  |  |            |
| I-B-2-                      | $\mathbb{P}(L \leq 978) \simeq$  |                              |            |   |                       |                              |       |                      |  |  |  |                             |  |  |  |       |  |  |            |
| I-B-3-                      | $\mathbb{P}(L \geq 982) \simeq$  |                              |            |   |                       |                              |       |                      |  |  |  |                             |  |  |  |       |  |  |            |
| I-C-1-                      | <table border="1"> <thead> <tr> <th>%</th> <th>Défaut sur le plateau</th> <th>Pas de défaut sur le plateau</th> <th>Total</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Défaut sur les pieds</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Pas de défaut sur les pieds</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Total</td> <td></td> <td></td> <td><b>100</b></td> </tr> </tbody> </table> |                              |            | % | Défaut sur le plateau | Pas de défaut sur le plateau | Total | Défaut sur les pieds |  |  |  | Pas de défaut sur les pieds |  |  |  | Total |  |  | <b>100</b> |
| %                           | Défaut sur le plateau  | Pas de défaut sur le plateau | Total      |   |                       |                              |       |                      |  |  |  |                             |  |  |  |       |  |  |            |
| Défaut sur les pieds        |  |                              |            |   |                       |                              |       |                      |  |  |  |                             |  |  |  |       |  |  |            |
| Pas de défaut sur les pieds |  |                              |            |   |                       |                              |       |                      |  |  |  |                             |  |  |  |       |  |  |            |
| Total                       |  |                              | <b>100</b> |   |                       |                              |       |                      |  |  |  |                             |  |  |  |       |  |  |            |
| I-C-2-                      | $P_3 =$  |                              |            |   |                       |                              |       |                      |  |  |  |                             |  |  |  |       |  |  |            |
| I-C-3-                      | $P_4 =$  |                              |            |   |                       |                              |       |                      |  |  |  |                             |  |  |  |       |  |  |            |

## EXERCICE II

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 5

On se place dans le plan complexe rapporté au repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  orthonormé, direct.

Pour tout nombre complexe  $z$ , on définit :

$$P(z) = z^3 - 8z^2 + 24z - 32.$$

II-1-a- Calculer  $P(4)$ .

II-1-b- Pour tout nombre complexe  $z$ ,  $P(z)$  s'écrit :  $P(z) = (z - 4)Q(z)$

où  $Q(z)$  s'écrit sous la forme  $Q(z) = z^2 + bz + c$ .

Donner les valeurs des réels  $b$  et  $c$ .

II-1-c- Déterminer l'ensemble  $S_1$  des solutions, dans  $\mathbb{C}$ , de l'équation  $Q(z) = 0$ . Justifier le résultat.

II-1-d- En déduire l'ensemble  $S_2$  des solutions, dans  $\mathbb{C}$ , de l'équation  $P(z) = 0$ .

II-2- Placer sur la figure les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives :

$$z_A = 4, \quad z_B = 2 + 2i, \quad z_C = \overline{z_B}$$

où  $\overline{z_B}$  désigne le conjugué du complexe  $z_B$ .

II-3-a- Donner le module  $|z_B|$  et un argument  $\arg(z_B)$  de  $z_B$ .

II-3-b- Donner le module  $|z_C|$  et un argument  $\arg(z_C)$  de  $z_C$ .

II-3-c- En déduire une mesure, en radians, de l'angle  $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$ . Justifier le résultat.

II-4-a- Donner l'affixe  $Z_1$  du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  et l'affixe  $Z_2$  du vecteur  $\overrightarrow{AC}$ .

II-4-b- Donner les modules  $|Z_1|$  et  $|Z_2|$  des complexes  $Z_1$  et  $Z_2$ .

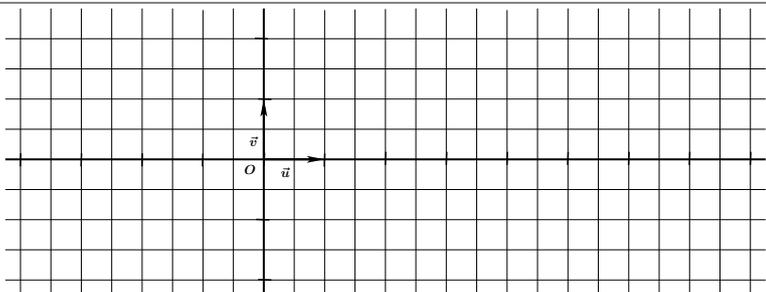
II-5- Quelle est la nature précise du quadrilatère  $ABOC$ ? Justifier la réponse.

II-6- Soit  $D$  le point du plan tel que le quadrilatère  $OADB$  soit un parallélogramme.

II-6-a- Déterminer l'affixe  $z_D$  du point  $D$ . Justifier le résultat.

II-6-b- Tracer le parallélogramme  $OADB$  sur la figure de II-2-.

## REPONSES A L'EXERCICE II

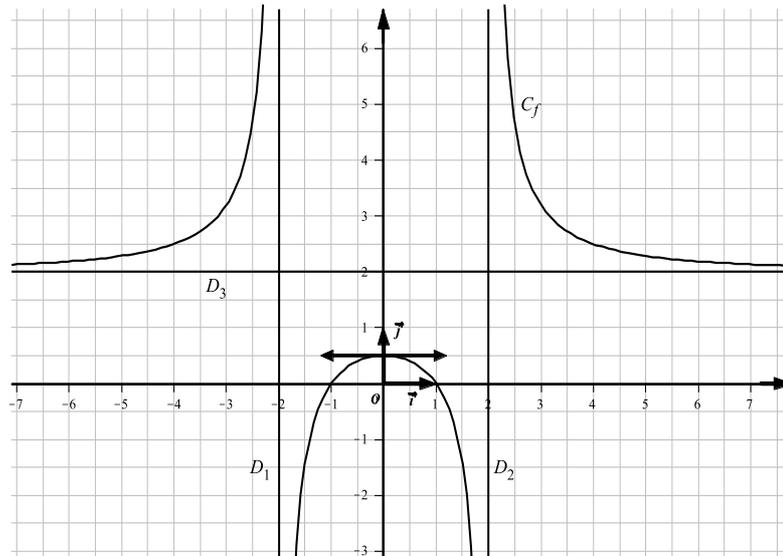
|         |   |
|---------|---|
| II-1-a- | $P(4) =$  |
| II-1-b- | $b =$ <span style="float: right;"><math>c =</math></span>                           |
| II-1-c- | $S_1 =$ <span style="float: right;">car</span>                                      |
| II-1-d- | $S_2 =$   |
| II-2-   |  |
| II-3-a- | $ z_B  =$ <span style="float: right;"><math>arg(z_B) =</math></span>                |
| II-3-b- | $ z_C  =$ <span style="float: right;"><math>arg(z_C) =</math></span>                |
| II-3-c- | $(\vec{OC}, \vec{OB}) =$ <span style="float: right;">car</span>                     |
| II-4-a- | $Z_1 =$ <span style="float: right;"><math>Z_2 =</math></span>                       |
| II-4-b- | $ Z_1  =$ <span style="float: right;"><math> Z_2  =</math></span>                   |
| II-5-   | $ABOC$ est <span style="float: right;">car</span>                                   |
| II-6-a- | $z_D =$ <span style="float: right;">car</span>                                      |
| II-6-b- | Utiliser la figure de <b>II-2-</b>  |

### EXERCICE III

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 7

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -\infty ; -2[ \cup ] -2 ; 2[ \cup ] 2 ; +\infty [$  dont la courbe  $\mathcal{C}_f$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  est donnée ci-dessous.

On a tracé, sur cette figure, les trois asymptotes à  $\mathcal{C}_f$  :  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_3$ .



#### Partie A Lecture graphique

Dans cette partie, on répondra aux questions à partir d'une lecture graphique.

- III-A-1-a- Donner les valeurs de  $f(0)$  et de  $f'(0)$ .
- III-A-1-b- Donner l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de l'équation  $f(x) = 0$ .
- III-A-1-c- Donner l'ensemble  $\mathcal{S}'$  des solutions de l'équation  $f(x) = 1$ .
- III-A-2- Donner une équation de chaque asymptote  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_3$ .
- III-A-3- Donner, dans le tableau, le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
- III-A-4- Donner, dans le tableau, le signe de  $f'(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

#### Partie B Etude de la fonction $f$ sur $]2; +\infty[$

On se limite dans cette partie à l'étude de  $f$  sur l'intervalle  $]2; +\infty[$ .

La fonction  $f$  est définie, pour tout réel  $x \in ]2; +\infty[$ , par :  $f(x) = 2 + \frac{6}{x^2 - 4}$ .

- III-B-1-a- Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Justifier le résultat.
- III-B-1-b- Le résultat énoncé à la question III-B-1-a- justifie que l'une des trois droites  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$  ou  $\mathcal{D}_3$  est bien asymptote à la courbe  $\mathcal{C}_f$ . De quelle droite s'agit-il ?
- III-B-2- Donner la position de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à l'asymptote  $\mathcal{D}_3$  sur  $]2; +\infty[$ . Justifier le résultat.
- III-B-3-  $f'$  désigne la dérivée de  $f$ . Donner  $f'(x)$  pour tout  $x \in ]2; +\infty[$ .
- III-B-4- Quel est le sens de variation de  $f$  sur  $]2; +\infty[$ ? Justifier la réponse.
- III-B-5- Donner une équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 4.

REPONSES A L'EXERCICE III

|                     |   |                   |     |           |           |                     |  |  |
|---------------------|---|-------------------|-----|-----------|-----------|---------------------|--|--|
| III-A-1-a-          | $f(0) =$  | $f'(0) =$         |     |           |           |                     |  |  |
| III-A-1-b-          | $S =$   |                   |     |           |           |                     |  |  |
| III-A-1-c-          | $S' =$  |                   |     |           |           |                     |  |  |
| III-A-2-            | $\mathcal{D}_1 :$   | $\mathcal{D}_2 :$ |     |           |           |                     |  |  |
|                     |   | $\mathcal{D}_3 :$ |     |           |           |                     |  |  |
| III-A-3-            | <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 15%; text-align: center; padding: 5px;"><math>x</math></td> <td style="width: 70%; padding: 5px;"><math>-\infty</math></td> <td style="width: 15%; text-align: right; padding: 5px;"><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">signe de<br/><math>f(x)</math></td> <td colspan="2" style="padding: 5px;"></td> </tr> </table>  |                   | $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ | signe de<br>$f(x)$  |  |  |
| $x$                 | $-\infty$   | $+\infty$         |     |           |           |                     |  |  |
| signe de<br>$f(x)$  |   |                   |     |           |           |                     |  |  |
| III-A-4-            | <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 15%; text-align: center; padding: 5px;"><math>x</math></td> <td style="width: 70%; padding: 5px;"><math>-\infty</math></td> <td style="width: 15%; text-align: right; padding: 5px;"><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">signe de<br/><math>f'(x)</math></td> <td colspan="2" style="padding: 5px;"></td> </tr> </table> |                   | $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ | signe de<br>$f'(x)$ |  |  |
| $x$                 | $-\infty$   | $+\infty$         |     |           |           |                     |  |  |
| signe de<br>$f'(x)$ |   |                   |     |           |           |                     |  |  |
| III-B-1-a-          | $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$   | car               |     |           |           |                     |  |  |
| III-B-1-b-          | On en déduit que la droite est asymptote à $\mathcal{C}_f$ .  |                   |     |           |           |                     |  |  |
| III-B-2-            | Position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}_3$ sur $]2; +\infty[ :$<br>car  |                   |     |           |           |                     |  |  |
| III-B-3-            | Pour tout $x \in ]2; +\infty[$ , $f'(x) =$  |                   |     |           |           |                     |  |  |
| III-B-4-            | Sur $]2; +\infty[$ , $f$ est car  |                   |     |           |           |                     |  |  |
| III-B-5-            | $\mathcal{T} :$   |                   |     |           |           |                     |  |  |

## EXERCICE IV

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 9

Un boulanger constate que la vitesse de refroidissement du pain sorti du four dépend de la température du pain à l'instant  $t$  et de la température ambiante constante de la pièce dans laquelle il est entreposé.

On note  $a$  cette température constante de la pièce, exprimée en degrés Celsius.

Pour tout  $t \geq 0$ , on désigne par  $y(t)$  la température du pain au bout d'un temps  $t$  après sa sortie du four.

La durée  $t$  est exprimée en heures et la température  $y(t)$  est exprimée en degrés Celsius.

La fonction  $y$  vérifie l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y'(t) + 6y(t) = 6a .$$

IV-1-a- On considère l'équation différentielle (H) :

$$(H) : y'(t) + 6y(t) = 0 .$$

Les solutions  $y$  de l'équation différentielle (H) vérifient :

pour tout  $t \geq 0$ ,  $y(t) = C e^{kt}$ , où  $C$  est un réel quelconque.

Donner la valeur du réel  $k$ .

IV-1-b- Les solutions  $y$  de l'équation différentielle (E) vérifient :

pour tout  $t \geq 0$ ,  $y(t) = C e^{-6t} + B$ .

Montrer que  $B = a$ .

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que le pain sort du four à une température de  $180^\circ\text{C}$ , c'est-à-dire que :  $y(0) = 180$ .

IV-2- Justifier que, pour tout  $t \geq 0$  :

$$y(t) = (180 - a) e^{-6t} + a .$$

IV-3- Dans cette question, le pain est entreposé dans une pièce dont la température constante est  $a = 28^\circ\text{C}$ .

IV-3-a- Ecrire, pour tout  $t \geq 0$ ,  $y(t)$  en fonction de  $t$ .

IV-3-b- Déterminer la température  $\theta$  du pain une demi-heure après la sortie du four. On donnera une valeur approchée de  $\theta$  à un degré près. Justifier le résultat.

IV-3-c- Le boulanger sort une fournée de pains du four.

Au bout de quelle durée  $D$  le pain sera-t-il à une température de  $62^\circ\text{C}$  ? On donnera une valeur approchée de  $D$  à une minute près. Justifier le résultat.

IV-4- On reprend l'expression de  $y(t)$  donnée à la question IV-2-.

Quelle devrait être la température  $a$  de la pièce dans laquelle est entreposé le pain afin que le pain, sorti du four à 16 heures, soit à une température de  $30^\circ\text{C}$  à 16 h 30 ? On donnera une valeur approchée de  $a$  à un degré près. Justifier le résultat.

## REPONSES A L'EXERCICE IV

|                |  |
|----------------|--|
| <b>IV-1-a-</b> | $k =$  |
| <b>IV-1-b-</b> | $B = a$ car  |
| <b>IV-2-</b>   | Pour tout $t \geq 0$ , $y(t) = (180 - a) e^{-6t} + a$ . En effet : |
| <b>IV-3-a-</b> | Pour tout $t \geq 0$ , $y(t) =$                                    |
| <b>IV-3-b-</b> | $\theta \simeq$<br>Justification :                                 |
| <b>IV-3-c-</b> | $D \simeq$ minutes<br>Justification :                              |
| <b>IV-4-</b>   | $a \simeq$<br>Justification :                                      |