Le sujet comporte 8 pages numérotées de 2 à 9

Il faut choisir et réaliser seulement trois des quatre exercices proposés

EXERCICE I

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 3

On considère la fonction f définie, pour tout réel de $]\,0;\,+\infty\,[$, par :

$$f(x) = 2\ln x - (\ln x)^2$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentant f dans un repère $(O;\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ orthonormé.

I-1-a- Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$. Justifier la réponse.

1-b- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Justifier la réponse.

I-2-a- f' désigne la dérivée de f. Déterminer $f'(x)$.

2-b- Pour tout $x \in\,]\,0\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ s'écrit sous la forme : $f'(x) = g(x)\,(1-\ln(x))$

Donner l'expression de $g(x)$.

2-c- Compléter le tableau de variation de la fonction f.

f présente un extremum en un point M. Donner les coordonnées (x_M, y_M) de M.

I-3- La courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses (Ox) en deux points A et B d'abscisses respectives x_A et x_B telles que $x_A < x_B$.

Déterminer les valeurs exactes de x_A et de x_B. Détailler les calculs.

Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de x_B.

I-4- Placer les points A, B et M. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ ainsi que sa tangente au point M.

I-5- On considère la fonction F définie, pour tout $x \in\,]0;+\infty[$, par :

$$F(x) = x\left(-4 + 4\ln x - (\ln x)^2\right)$$

5-a- Montrer que F est une primitive de f. Détailler les calculs.

5-b- Soit J l'intégrale définie par : $J = \displaystyle\int_1^e f(x)\,dx.$

Calculer la valeur exacte de J en justifiant le calcul.

5-c- Sur la figure de **I-4-**, hachurer la partie du plan dont l'aire, exprimée en unités d'aire, vaut J.

REPONSES A L'EXERCICE I

I-1-a- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} -(\ln x)^2 = -\infty$

I-1-b- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ car $f(x) = \ln x\,(2 - \ln x)$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 - \ln x) = -\infty$

I-2-a- $f'(x) = \dfrac{2}{x} - 2 \ln x \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x}\,(1 - \ln x)$

I-2-b- $g(x) = \dfrac{2}{x}$

I-2-c-

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

$x_M = e$

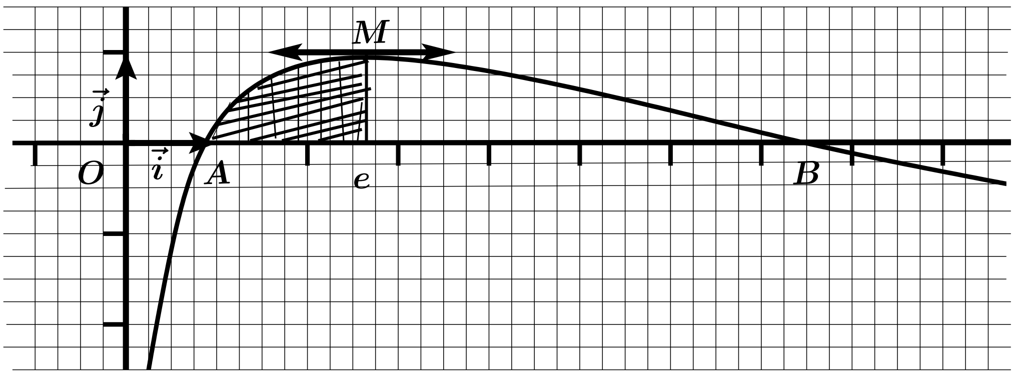
$y_M = 1$

I-3- $x_A = 1$ $\quad x_B = e^2$ $\quad x_B \simeq 7,4$

car $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\ln x - (\ln x)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \ln x\,(2 - \ln x) = 0$

$\Leftrightarrow\; \ln x = 0$ ou $\ln x = 2 \;\Leftrightarrow\; x = 1$ ou $x = e^2$

I-4-



I-5-a- F est la primitive de f car $F' = f$

En effet $F'(x) = \left(-4 + 4\ln x - (\ln x)^2\right) + x\left(\dfrac{4}{x} - 2\ln x \times \dfrac{1}{x}\right)$

donc $F'(x) = -4 + 4\ln x - (\ln x)^2 + 4 - 2\ln x$

d'où $F'(x) = 2\ln x - (\ln x)^2 = f(x)$

I-5-b- $J = 4 - e$ car $\ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$ et

$J = \displaystyle\int_1^e f(x)\,dx = F(e) - F(1) = e(-4 + 4 - 1) - (-4) = 4 - e.$

I-5-c- Utiliser la figure de **I-4-**.

EXERCICE II

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 5

Dans cet exercice, pour chaque probabilité demandée, on donnera **sa valeur exacte**, écrite sous forme de **fraction irréductible**.

Un marchand de parapluies ouvre son magasin **240** jours par an et sur ces journées, il y a 80 jours de beau temps, **40** jours de pluie et **120** jours de temps maussade.

- Il constate que lors d'une journée de beau temps, il a une probabilité de $\frac{3}{4}$ de ne pas vendre de parapluie, et une probabilité de $\frac{1}{4}$ de vendre un parapluie.

- Lors d'une journée de pluie, il a une probabilité de $\frac{1}{4}$ de vendre un parapluie, une probabilité de $\frac{1}{4}$ de vendre deux parapluies et une probabilité de $\frac{1}{2}$ de vendre trois parapluies.

- Lors d'une journée de temps maussade, il a une probabilité de $\frac{1}{4}$ de ne pas vendre de parapluie, une probabilité de $\frac{1}{2}$ de vendre un parapluie et une probabilité de $\frac{1}{4}$ de vendre deux parapluies.

Pour une journée quelconque d'ouverture du magasin, on considère les événements suivants :

B : "Le temps est beau", P : "Le temps est pluvieux", M : "Le temps est maussade".

X désigne la variable aléatoire représentant le nombre de parapluies vendus ce jour-là.

II-1- Compléter l'arbre donné avec les probabilités correspondantes.

II-2-a- Sachant qu'il fait beau, quelle est la probabilité P_1 que le commerçant ne vende pas de parapluie ce jour-là. ?

2-b- Sachant qu'il pleut, quelle est la probabibilité P_2 que le commerçant vende au moins deux parapluies ce jour-là ?

II-3-a- Quelle est la probabilité $\mathbb{P}(X = 0)$ que le commerçant ne vende pas de parapluie ce jour-là ?

3-b- Quelle est la probabilité $\mathbb{P}(X = 2)$ que le commerçant vende deux parapluies ce jour-là ?

3-c- Quelle est la probabilité $\mathbb{P}(X = 3)$ que le commerçant vende trois parapluies ce jour-là ?

II-4-a- Compléter le tableau qui donne la loi de la variable aléatoire X.

4-b- Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

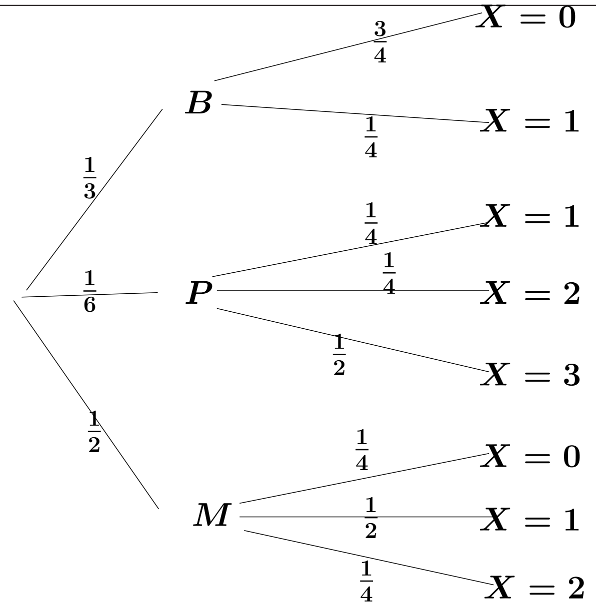
II-5- Il vend chaque parapluie **10** euros. Quel est le gain moyen G, en euros, que lui rapporte sa vente de parapluies pour un an ?

II-6- Sachant que, lors d'une journée donnée, le commerçant a vendu un seul parapluie, quelle est la probabilité P_3 que ce soit une journée de beau temps ?

II-7- Sachant que la journée n'est pas une journée de beau temps, quelle est la probabilité P_4 que le commerçant ne vende qu'un parapluie ?

REPONSES A L'EXERCICE II

II-1-



II-2-a- $P_1 = P_B(X = 0) = \dfrac{3}{4}$

II-2-b- $P_2 = P_P(X \geq 2) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$

II-3-a- $\mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{8}$

II-3-b- $\mathbb{P}(X = 2) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{6}$

II-3-c- $\mathbb{P}(X = 3) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{12}$

II-4-a-

x_i	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{12}$

II-4-b- $\mathbb{E}(X) = \dfrac{3}{8} + \dfrac{2}{6} + \dfrac{3}{12} = \dfrac{23}{24}$

II-5- $G = \dfrac{23}{24} \times 10 \times 240 = 2300$ euros

II-6- $P_3 = P_{X=1}(B) = \dfrac{2}{9}$

II-7- $P_4 = P_{\overline{B}}(X = 1) = \dfrac{7}{16}$

EXERCICE III

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 7

On se place dans le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé, direct.
Pour tout complexe z, on pose :

$$z' = (1+i)z - i$$

On considère la fonction $\mathcal{F}$ qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z'.

III-1- Soit le point A d'affixe $z_A = 1$. Déterminer l'image A' par $\mathcal{F}$ de A.

III-2- Dans cette question, on considère un point M d'affixe $z \neq 1$.

On considère le complexe $Z = \dfrac{z' - z}{1 - z}$.

2-a- Z peut s'écrire $Z = a\,i$. Déterminer a. Justifier le calcul.

2-b- Déterminer le module $|Z|$ et un argument $arg(Z)$ de Z.

2-c- Exprimer la distance MM' en fonction de MA et déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM'})$.

2-d- En déduire la nature du triangle AMM'.

2-e- Construire l'image M' par $\mathcal{F}$ du point M placé sur la figure.

III-3- C désigne le symétrique du point A par rapport à l'origine O du repère et B désigne le point d'affixe :

$$z_B = \frac{-1+i}{2}$$

3-a- Donner l'affixe z_C du point C.

3-b- Déterminer l'affixe $z_{B'}$ de l'image B' par $\mathcal{F}$ du point B. Détailler le calcul.

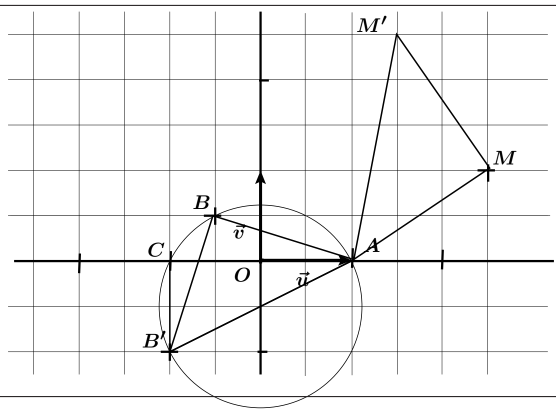
3-c- Placer les points B, B' et C sur la figure de **III-2-e-**.

III-4-a- Déduire de la question **III-2-c-** la mesure de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BB'})$.

4-b- Donner la mesure de l'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB'})$. Justifier le résultat.

4-c- En déduire que les points A, B, C et B' appartiennent à un même cercle dont on donnera les extrémités d'un diamètre. Justifier la réponse.

REPONSES A L'EXERCICE III

III-1-	$A' = A$
III-2-a-	$a = -1$ car $Z = \dfrac{z' - z}{1 - z} = \dfrac{(1+i)z - i - z}{1 - z} = \dfrac{i(z-1)}{1-z} = -i$
III-2-b-	$\lvert Z \rvert = 1$ $\qquad arg(Z) = -\dfrac{\pi}{2}$
III-2-c-	$MM' = MA$ $\qquad (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM'}) = Arg(Z) = -\dfrac{\pi}{2}$
III-2-d-	Le triangle AMM' est rectangle et isocèle en M
III-2-e-	
III-3-a-	$z_C = -z_A = -1$
III-3-b-	$z_{B'} = (1+i)\left(\dfrac{-1+i}{2}\right) - i = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i - \dfrac{1}{2}i - \dfrac{1}{2} - i = -1 - i$
III-3-c-	Utiliser la figure de **III-2-e-**
III-4-a-	$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BB'}) = -\dfrac{\pi}{2}$
III-4-b-	$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB'}) = -\dfrac{\pi}{2}$ car $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB'}) = Arg\left(\dfrac{z_{B'} - z_C}{z_A - z_C}\right)$ Donc $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB'}) = Arg\left(\dfrac{-1 - i - (-1)}{1 - (-1)}\right) = Arg\left(-\dfrac{i}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$
III-4-c-	A, B, B' et C appartiennent au cercle de diamètre $[AB']$ car les triangles ABB' et ACB' sont rectangles respectivement en B et en C. Ils sont donc tous deux d'hypothénuse $[AB']$ et donc inscrits dans le cercle de diamètre $[AB']$.

EXERCICE IV

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 9

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad : \quad y'(x) + y(x) = x + 1$$

où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

IV-1- Soit y une solution de l'équation différentielle (E). On note h la fonction définie pour tout réel x de $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = y(x) - x$$

1-a- En détaillant le calcul de $h'(x) + h(x)$, vérifier que h est solution de l'équation différentielle :

$$(F) \quad : \quad h'(x) = -h(x)$$

1-b- Déterminer toutes les fonctions h solutions de l'équation différentielle (F).

IV-2- En déduire toutes les fonctions y solutions de l'équation différentielle (E).

IV-3- Soit un réel a quelconque. On note f_a la fonction définie, pour tout réel x de $\mathbb{R}$, par :

$$f_a(x) = x + ae^{-x}$$

et on note $\mathcal{C}_a$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

3-a- Calculer $f_a(0)$.

3-b- Déterminer, pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $f_a'(x)$.

3-c- Déterminer une équation de la tangente T_a à la courbe $\mathcal{C}_a$ au point A_a d'abscisse nulle.

3-d- Justifier que le point $I(1; 1)$ appartient à la tangente T_a.

IV-4- Voici trois courbes représentant les fonctions f_{a_1}, f_{a_2} et f_{a_3}.

Déterminer a_1, a_2 et a_3. Justifier vos affirmations.

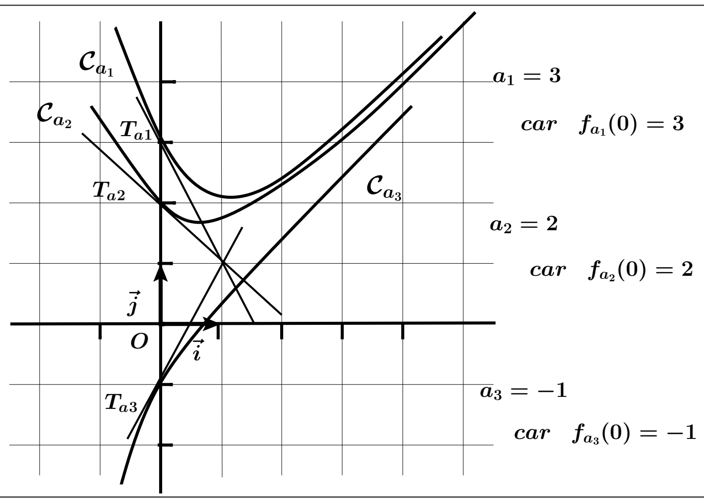
IV-5- Tracer, sur la figure de **IV-4-**, les tangentes T_{a_1}, T_{a_2} et T_{a_3} à chacune des trois courbes au point d'abscisse 0.

IV-6- Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Quel est le signe de $f_a(x) - f_b(x)$? Justifier votre réponse.

Qu'en déduisez-vous pour les courbes $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_b$?

REPONSES A L'EXERCICE IV

IV-1-a-	$h'(x)+h(x)=(y'(x)-1)+(y(x)-x)=y'(x)+y(x)-(x+1)$ Comme y est solution de (E) alors $y'(x)+y(x)=x+1$ Donc $h'(x)+h(x)=0 \Leftrightarrow h'(x)=-h(x)$
IV-1-b-	$h(x)=Ke^{-x}$
IV-2-	$y(x)=Ke^{-x}+x$
IV-3-a-	$f_a(0)=a$
IV-3-b-	$f'_a(x)=1-a\,e^{-x}$
IV-3-c-	$T_a\ :\ y=f'_a(0)(x-0)+f_a(0) \quad \Leftrightarrow \quad T_a\ :\ y=(1-a)\,x+a$
IV-3-d-	$I\in T_a$ car $(1-a)\,x_I+a=(1-a)+a=1=y_I$
IV-4-	
IV-5-	Utiliser la figure de **IV-4-**
IV-6-	Le signe de $f_a(x)-f_b(x)$ est négatif car f$_a(x)-f_b(x)=(x+a\,e^{-x})-(x+b\,e^{-x})=(a-b)\,e^{-x}$ De plus $(a-b)<0$ car $a<b$ et $e^{-x}>0$ pour tout réel x. Conséquence pour $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_b$: $\mathcal{C}_a$ est située en dessous de $\mathcal{C}_b$.