Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les exercices sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1

Soit la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ impaire et 2π-périodique telle que : $\forall x\in\left]0,2\pi\right[,\quad f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$

1. On suppose de plus que f est définie sur $\mathbb{R}$. En déduire $f(0)$.
2. Représenter graphiquement f sur l'intervalle $[-\pi,3\pi]$. On précisera sur cette figure la valeur de f aux points de discontinuité.
3. Calculer la série de Fourier de la fonction f. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$.

Soit la fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ impaire et 2π-périodique telle que : $\begin{cases}\forall x\in\left]0,1\right],\ g(x)=xf(1)\\ \forall x\in\left]1,\pi\right],\ g(x)=f(x)\end{cases}$.

4. Représenter la fonction g sur $[-\pi,3\pi]$.
5. Calculer $\int_0^1 x\sin(nx)dx$, puis $\int_0^\pi\big(g(x)-f(x)\big)\sin(nx)dx$. En déduire la série de Fourier g.
6. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n)\sin(nx)}{n^2}$.
7. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n)}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(n)}{n^2}$. Exprimer ces sommes à l'aide de π.
8. En appliquant la relation de Parseval à la fonction g, calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(n)}{n^4}$.

Exercice 2

Partie A

Soit un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3 de base orthonormée $\mathcal{B}=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, f un endomorphisme de matrice $\mathbf{A}$ dans la base $\mathcal{B}$, et une matrice $\mathbf{S}$ avec $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}7&-4&-4\\-4&1&-8\\-4&-8&1\end{pmatrix}$,

$\mathbf{S}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\2&1&-2\end{pmatrix}$. Soient la famille de vecteurs $\left(\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'\right)$ ayant pour composantes dans la base $\mathcal{B}$: $\vec{i}':(1,2,2)$, $\vec{j}':(2,-2,1)$, $\vec{k}':(2,1,-2)$.

1) Montrer que $\mathcal{B}'=\left(\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'\right)$ est une base orthogonale de E .

2) Montrer que $\mathbf{S}^2=\mathbf{S}.\mathbf{S}=9\mathbf{I}$, (**I** étant la matrice de l'identité de $\mathcal{E}$). En déduire l'inverse de $\mathbf{S}$.

3) Montrer que $\left(\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'\right)$ sont des vecteurs propres de **A.** Préciser les valeurs propres associées ainsi que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. Trouver une matrice diagonale **D** telle que

(1) $\quad\mathbf{A}=\mathbf{S}.\mathbf{D}.\mathbf{S}$

En déduire, sans calcul explicite de produit matriciel, que $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}.\mathbf{A}=81\mathbf{I}$.

Partie B

On considère trois fonctions (x,y,z) dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant le système différentiel :

$$(\mathrm{SD})\begin{cases} x'(t) = 7x(t) - 4y(t) - 4z(t) \\ y'(t) = -4x(t) + y(t) - 8z(t) \\ z'(t) = -4x(t) - 8y(t) + z(t) \end{cases}$$, avec la condition initiale(CI) $\big(x(0),y(0),z(0)\big)=\big(9,0,9\big)$

Dans un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension 3, on sera amené à utiliser le repère orthonormé $\mathcal{R}=(\mathbf{O};\mathcal{B})=\left(\mathbf{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ainsi que le repère orthogonal $\mathcal{R}'=(\mathbf{O};\mathcal{B}')=\left(\mathbf{O};\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'\right)$.

1) Montrer que (SD) peut s'écrire $\mathbf{X}'(t)=\mathbf{A}.\mathbf{X}(t)$ en précisant ce qu'est $\mathbf{X}(t)$.

2) Soit la matrice colonne $\mathbf{U}(t)=\mathbf{S}.\mathbf{X}(t)$, avec $\mathbf{U}(t)={}^{t}\big(u(t)\ \ v(t)\ \ w(t)\big)$. Montrer que $\mathbf{U}(t)$ vérifie un système différentiel simple (calculer $\mathbf{U}'(t)$ et utiliser l'équation (1) du A3)). Préciser la condition initiale $\mathbf{U}(0)$.

3) Calculer $\mathbf{U}(t)$. Si dans le repère orthonormé $\mathcal{R}'$, $\mathbf{m}_t$ est le point de coordonnées $\big(u(t), v(t), w(t)\big)$ déterminer un vecteur (constant) $\vec{\mathbf{n}}\in\mathcal{E}$ tel que $\forall t\in\mathbb{R},\ \vec{\mathbf{n}}\perp\overrightarrow{\mathbf{Om}_t}$.

4) Déduire de ce qui précède l'unique fonction $\mathbf{X}(t)$ vérifiant (SD) et (CI). Si dans le repère $\mathcal{R}$, $\mathbf{M}_t$ est le point de coordonnées $\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ déterminer un vecteur (constant) $\vec{\mathbf{N}}\in\mathcal{E}$ tel que $\forall t\in\mathbb{R},\ \vec{\mathbf{N}}\perp\overrightarrow{\mathbf{OM}_t}$.

5) Pour $t\in\mathbb{R}$ le point $\mathbf{M}_t$ de coordonnées $\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ décrit la courbe $\mathcal{H}$. Montrer que $\mathcal{H}$ est incluse dans un plan dont on donnera une équation cartésienne.

6) Représenter graphiquement dans le repère $\left(\mathbf{O};\vec{i}',\vec{j}'\right)$ la courbe de représentation paramétrique $\big(u(t),v(t)\big)$. Quelle est la nature de cette courbe? Quel est son rapport avec la courbe $\mathcal{H}$?

Exercice 3

Les questions 3) et 4) sont indépendantes des questions 1) et 2)

Soit $f(x)=\displaystyle\int_0^{x/2}\frac{dv}{\cos(v)}$ pour $x\in\,]-\pi,\pi[$.

1.a) Calculer $f'(x)$. Montrer que f est impaire et strictement croissante.

1.b) Donner un équivalent simple de $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-u\right)=\sin u$ au voisinage de 0. En déduire que

$\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} f(x)=\lim_{x\to\pi^-}\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dv}{\sin v}=+\infty$, et que f est une bijection de $]-\pi,\pi[$ vers $\mathbb{R}$.

On note $g=f^{-1}$ et donc dans leurs domaines de définition on a $y=f(x)\Leftrightarrow x=g(y)$.

2) a) Montrer que $g'(y)=2\cos\left(\dfrac{g(y)}{2}\right)$. Calculer $g''(y)$.

b) Montrer que $g(t)$ est solution de l'équation différentielle en t :

$$X''(t)+\sin(X(t))=0 \text{ avec } t\geq 0, X(0)=0, X'(0)=a>0$$

pour une valeur de a à préciser.

3) Calculer $h(t)=\displaystyle\int_0^t\frac{2du}{1-u^2}$ pour $t\in\,]-1,1[$ [on utilisera la décomposition $\dfrac{2}{1-u^2}=\dfrac{a}{1-u}+\dfrac{b}{1+u}$].

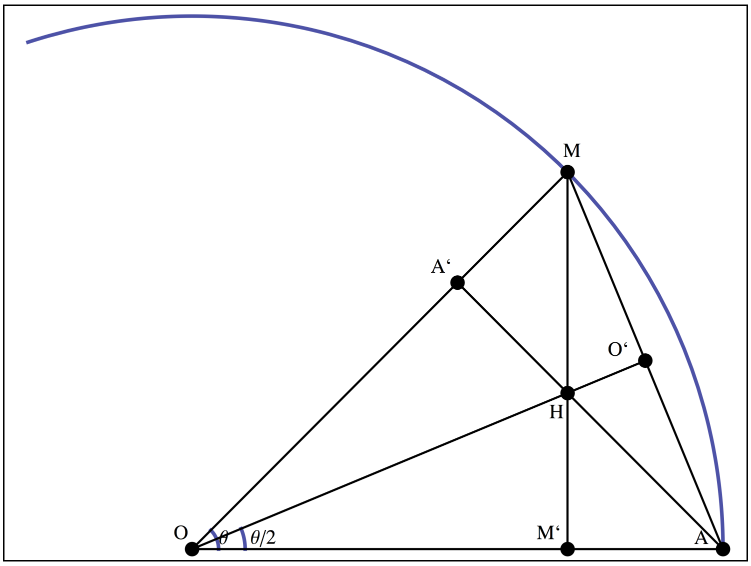
4) Dans l'intégrale définissant $f(x)$, on pose $u=\tan\left(\dfrac{v}{2}\right)$.

a) Exprimer v en fonction de u, puis dv en fonction de u et du .

b) Montrer que $\cos(v) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ [Indication : on peut calculer d'abord $\cos^2\left(\dfrac{v}{2}\right)$].

c) Faire le calcul de l'intégrale définissant $f(x)$ et en déduire une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 4



Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$, on considère le cercle C, de centre O et de rayon 1. On note A le point de coordonnées (1,0). Soit M un point du cercle C tel que $\theta = (\vec{i},\overrightarrow{\mathrm{OM}})$ avec $0 \leq \theta < \pi$, O′ la projection orthogonale de O sur (AM) (c'est aussi le milieu de $[\mathrm{A},\mathrm{M}]$), A′ la projection orthogonale de A sur (OM), M′ la projection orthogonale de M sur (OA). L'intersection des trois hauteurs (OO′),(AA′),(MM′) est l'orthocentre H du triangle (OAM).

1) Donner les coordonnées des points M, M′, O′ en fonction de θ.

2) Montrer que les coordonnées $(\mathrm{x}(\theta),\mathrm{y}(\theta))$ du point H sont $\left(\cos(\theta),\cos(\theta)\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)$.

(On conviendra que pour θ=0, H=A)

3) Calculer $(\mathrm{x}'(\theta),\mathrm{y}'(\theta))$.

4) On rappelle que si on pose $t = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, on a : $\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

Montrer, en exprimant tout à l'aide de *t,* que $\mathrm{y}'(\theta) = \cos\theta - \dfrac{1}{1+\cos\theta}$. En déduire le signe de $\mathrm{y}'(\theta)$ pour $0 \leq \theta < \pi$. On notera θ_0 le réel de $[0,\pi]$ tel que $\cos(\theta_0) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

5) Faire le tableau de variation conjoint de $(\mathrm{x}(\theta),\mathrm{y}(\theta))$ pour $0 \leq \theta < \pi$. On précisera les valeurs ou les limites de $\mathrm{x}(\theta),\mathrm{y}(\theta)$ et de $\mathrm{x}'(\theta),\mathrm{y}'(\theta)$ en 0 et π ainsi qu'aux extrema éventuels de x et y.

6) On appelle Γ la courbe paramétrée décrite par $(x(\theta),y(\theta))$. Montrer que Γ admet une asymptote verticale à préciser.

7) Donner une représentation graphique de Γ en plaçant l'asymptote, les points et les tangentes à ces points pour les valeurs 0, θ_0, $\dfrac{\pi}{2}$ de θ.[On prendra $\cos(\theta_0) \simeq 0{,}62$ et $\cos(\theta_0)\tan\left(\dfrac{\theta_0}{2}\right) \simeq 0{,}30$]

8) Montrer que les coordonnées (x,y) des points de la courbe Γ vérifient l'équation : $x\left(x^2+y^2\right) = x^2 - y^2$.