# Corrigé

## Exercice 1

1. Le calcul de $I_0$ s'effectue directement :

$$I_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta = 1 \ .$$

Pour calculer $I_1$, on utilise la formule de trigonométrie suivante : $\sin^2(\theta) = \dfrac{1}{2}\left(1-\cos(2\theta)\right)$. On obtient :

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\cos(2\theta)\right)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} \ .$$

2. Soit $k$ un entier strictement positif.

$$I_{k-1} - I_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin^{2(k-1)}(\theta) - \sin^{2k}(\theta)\right)\,d\theta \ .$$

En factorisant par $\sin^{2k-2}(\theta)$ on obtient :

$$I_{k-1} - I_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^{2k-2}(\theta)\left(1-\sin^2(\theta)\right)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^{2k-2}(\theta)\cos^2(\theta)\,d\theta = J_{k-1} \ .$$

3. L'intégrale $J_{k-1}$ s'écrit :

$$J_{k-1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^{2k-2}(\theta)\cos^2(\theta)\,d\theta \ .$$

Soit $u$ et $v$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(\theta) = \frac{1}{2k-1}\sin^{2k-1}(\theta) \quad \text{et} \quad v(\theta) = \cos(\theta) \ .$$

Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ; leurs dérivées respectives sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u'(\theta) = \cos(\theta)\sin^{2k-2}(\theta) \quad \text{et} \quad v'(\theta) = -\sin(\theta) \ .$$

Le théorème d'intégration par parties s'applique et nous permet donc d'écrire :

$$J_{k-1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} u'(\theta)v(\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\left[u(\theta)v(\theta)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} u(\theta)v'(\theta)\,d\theta \ .$$

La fonction $u$ s'annule en 0 et en $\pi$, donc le crochet vaut 0, et on obtient :

$$J_{k-1} = \frac{1}{\pi(2k-1)}\int_0^{\pi}\sin^{2k-1}(\theta)\sin(\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi(2k-1)}\int_0^{\pi}\sin^{2k}(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2k-1}\,I_k \ .$$

En réinjectant cette expression de $J_{k-1}$ dans la relation obtenue à la question 2, on obtient :

$$I_{k-1} - I_k = \frac{1}{2k-1}\,I_k \ ,$$

ce qui donne :

$$I_{k-1} = \left(1 + \frac{1}{2k-1}\right)I_k \ ,$$

puis la relation $(R)$ cherchée :

$$I_k = \frac{2k-1}{2k}I_{k-1} \ .$$

4. Soit $\mathcal{P}_k$ la proposition : $I_k = \dfrac{(2k)!}{4^k (k!)^2}$. On va démontrer par récurrence que $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout entier $k \geq 1$.
   - Initialisation : ici $k = 1$. D'après la question 1, $I_1 = \dfrac{1}{2}$. Par ailleurs $2! = 2$ et $1! = 1$ donc $\dfrac{2!}{4 \times (1!)^2} = \dfrac{1}{2}$. Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.
   - Hérédité : soit $k$ un entier strictement positif fixé. Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie, et montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie, c'est-à-dire que :
   $$I_{k+1} = \frac{(2k+2)!}{4^{k+1}((k+1)!)^2} \ .$$
   On commence par exprimer $I_{k+1}$ en fonction de $I_k$ grâce à la relation de récurrence $(R)$ :
   $$I_{k+1} = \frac{2(k+1)-1}{2(k+1)} \, I_k = \frac{2k+1}{2k+2} \, I_k \ .$$
   Puis on utilise l'hypothèse de récurrence, qui donne $I_k$ en fonction de $k$ :
   $$I_k = \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} \ .$$
   On obtient donc :
   $$I_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+2} \times \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} \ .$$
   En multipliant haut et bas par $2k+2$ on obtient :
   $$I_{k+1} = \frac{(2k+2)(2k+1)\,(2k)!}{(2(k+1))^2 4^k (k!)^2} = \frac{(2k+2)!}{4(k+1)^2 4^k (k!)^2} = \frac{(2k+2)!}{4^{k+1}((k+1)!)^2} \ .$$
   - Conclusion : pour tout entier $k$ strictement positif, $\mathcal{P}_k$ est vraie.
5. Soit $n$ un entier strictement positif. La relation $(R)$ s'écrit : $I_n = \dfrac{2n-1}{2n} I_{n-1}$. En prenant le logarithme népérien de cette égalité, on obtient :
   $$\ln(I_n) = \ln\left(\frac{2n-1}{2n}\right) + \ln(I_{n-1}) \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) + u_{n-1} \ .$$
   Par une récurrence immédiate on obtient :
   $$u_n = u_0 + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{2k}\right) \ ;$$
   or $u_0 = \ln(I_0) = \ln(1) = 0$ d'après le résultat obtenu à la question 1. D'où :
   $$u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{2k}\right) \ .$$
6. (a) Soit $h$ la fonction définie par : $h(x) = \ln(1+x) - x$. Elle est définie sur $]-1\,;+\infty[$, et elle est continue et dérivable sur cet intervalle. On a :
   $$\forall x > -1, \quad h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \ .$$
   Sur $]-1\,;0[$, $1+x > 0$ et $-x > 0$, donc $h'(x) > 0$, ce qui montre que $h$ est strictement croissante sur $]-1\,;0[$.
   De plus $h(0) = 0$. On en déduit que :
   $$\forall x \in ]-1\,;0[, \quad h(x) < 0\ , \quad \text{c'est-à-dire} \quad \ln(1+x) < x \ .$$
   (b) Soit $k$ un entier strictement positif. Alors $\dfrac{-1}{2k} < 0$ et $\dfrac{-1}{2k} > -1$ (car $2k > 1$). Ainsi grâce à la question précédente, on peut écrire :
   $$\ln\left(1 - \frac{1}{2k}\right) < \frac{-1}{2k} < 0 \ .$$

(c) Des questions 5 et 6(b), on déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n < \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{2k} .$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{-1}{2k} = -\infty$ car la série de terme général $\frac{-1}{2k}$ est de type Riemann divergente. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. Enfin, $I_n = e^{u_n}$, ce qui implique que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0 .$$

7. On calcule $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} S_n(x,\theta)\, d\theta$ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} S_n(x,\theta)\, d\theta &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(x\sin(\theta))^{2k}\right) d\theta \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x\sin(\theta))^{2k}\, d\theta\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \underbrace{\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin(\theta))^{2k}\, d\theta\right)}_{I_k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\cancel{(2k)!}}\, x^{2k}\, \frac{\cancel{(2k)!}}{4^k (k!)^2} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\
&= g_n(x) .
\end{aligned}$$

8. Soit $x$ un réel fixé. On étudie la convergence absolue de la série (numérique) de terme général $\alpha_k = \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$. Pour cela on calcule le rapport $\left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right|$ :

$$\left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right| = \frac{(k!)^2}{((k+1)!)^2}\, \frac{4^k}{4^{k+1}}\, \frac{x^{2(k+1)}}{x^{2k}} = \frac{x^2}{4(k+1)^2} .$$

La limite, lorsque $k$ tend vers $+\infty$, de $\left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right|$, vaut 0, donc, d'après le critère de D'Alembert pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $|\alpha_k|$ est convergente. Ceci étant valable quel que soit le réel $x$, on en conclut que la série entière $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

9. (a) Le développement en série entière de la fonction cosinus est le suivant :

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} .$$

Son rayon de convergence vaut $+\infty$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant le développement en série entière du cosinus donné à la question 9(a), on a :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin(\theta))\, d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (x\sin(\theta))^{2k}\right) d\theta .$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On utilise alors le résultat de la question 7 pour écrire :

$$\begin{aligned}
|\varphi(x) - g_n(x)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (x \sin(\theta))^{2k} \right) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (x \sin(\theta))^{2k} \right) d\theta \right| \\
&= \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (x \sin(\theta))^{2k} \right) d\theta \right| \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (x \sin(\theta))^{2k} \right| d\theta \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^k}{(2k)!} (x \sin(\theta))^{2k} \right| \right) d\theta \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} \, x^{2k} \left(\sin(\theta)\right)^{2k} \right) d\theta \; .
\end{aligned}$$

Or $\sin(\theta)^2$ est un réel compris entre 0 et 1, et $k > n$, ce qui implique que : $\left(\sin(\theta)^2\right)^k \leq \left(\sin(\theta)^2\right)^n$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
|\varphi(x) - g_n(x)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} \, x^{2k} \left(\sin(\theta)\right)^{2n} \right) d\theta \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \underbrace{\left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} \, x^{2k} \right)}_{R_n(x)} \left(\sin(\theta)\right)^{2n} d\theta \\
&= R_n(x) \times \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\sin(\theta)\right)^{2n} d\theta \; .
\end{aligned}$$

10. (a) Le développement en série entière de la fonction cosinus hyperbolique est le suivant :

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} \, x^{2k} \; .$$

Son rayon de convergence vaut $+\infty$.

(b) Soit $x$ un réel. La série de terme général $\dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$ est à termes positifs. Elle est convergente ; sa somme vaut $\mathrm{ch}(x)$ et $R_n(x)$ est son reste d'indice $n$ ; on peut donc en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n(x) \leq \mathrm{ch}(x) \; .$$

Par ailleurs, $\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi \left(\sin(\theta)\right)^{2n} d\theta = I_n$, donc le résultat de la question 9 se réécrit :

$$|\varphi(x) - g_n(x)| \leq R_n(x) \times I_n \leq \mathrm{ch}(x) \times I_n \; .$$

11. D'après la question 6(c), la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, donc le théorème des gendarmes implique que :

$$\lim_{n \to +\infty} |\varphi(x) - g_n(x)| = 0 \; ,$$

c'est-à-dire que :

$$\lim_{n \to +\infty} g_n(x) = \varphi(x) \; ;$$

Or : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} g_n(x) = g(x)$. On en conclut, par unicité de la limite, que :

$$g(x) = \varphi(x) \; .$$

**Exercice 2** Soit $a$ et $p$ deux réels positifs, avec $p > 0$.

1. Soit $M$ un réel strictement positif. Alors :

$$\int_0^M e^{-px}\sin(ax)\,dx = \mathrm{Im}\left(\int_0^M e^{-px}e^{iax}\,dx\right) = \mathrm{Im}\left(\int_0^M e^{(ia-p)x}\,dx\right) .$$

Comme $p > 0$, le complexe $ia - p$ n'est pas nul, et :

$$\int_0^M e^{(ia-p)x}\,dx = \left[\frac{1}{ia-p}\,e^{(ia-p)x}\right]_0^M = \frac{1}{ia-p}\,e^{(ia-p)M} - \frac{1}{ia-p} .$$

Déterminons la partie imaginaire de ce complexe. On a d'abord : $\dfrac{1}{ia-p} = \dfrac{-p-ia}{a^2+p^2}$, ce qui montre que :

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{ia-p}\right) = -\frac{a}{a^2+p^2} .$$

Ensuite : $e^{(ia-p)M} = e^{-pM}e^{iaM} = e^{-pM}\left(\cos(aM) + i\sin(aM)\right)$, d'où :

$$\mathrm{Im}\left(\int_0^M e^{(ia-p)x}\,dx\right) = -\frac{p}{a^2+p^2} \times \sin(aM)e^{-pM} - \frac{a}{a^2+p^2}\cos(aM)e^{-pM} + \frac{a}{a^2+p^2} .$$

Enfin, $\lim\limits_{M\to+\infty}\cos(aM)e^{-pM} = \lim\limits_{M\to+\infty}\sin(aM)e^{-pM} = 0$ car ce sont des produits d'une fonction bornée par une exponentielle qui tend vers 0 (car $p > 0$).
Ceci démontre que :

$$\lim_{M\to+\infty}\int_0^M e^{-px}\sin(ax)\,dx = \frac{a}{a^2+p^2} .$$

Donc l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-px}\sin(ax)\,dx$ est convergente et vaut :

$$\int_0^{+\infty} e^{-px}\sin(ax)\,dx = \frac{a}{a^2+p^2} .$$

2. On définit $F(p)$ par :

$$F(p) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\theta)}{\sin^2(\theta)+p^2}\,d\theta .$$

   (a) On pose $t = \dfrac{\cos(\theta)}{\sqrt{1+p^2}}$. La fonction cosinus est de classe $\mathcal{C}^1$ et est une bijection de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0\,;1]$ ; on en déduit que la fonction $\theta \mapsto \dfrac{\cos(\theta)}{\sqrt{1+p^2}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et est une bijection de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[0\,;\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right]$. Cela justifie le changement de variable. On obtient :

$$dt = -\frac{\sin(\theta)}{\sqrt{1+p^2}}\,d\theta ,$$

et $t^2 = \dfrac{\cos^2(\theta)}{1+p^2}$, ce qui implique que : $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta) = 1 - t^2(1+p^2)$. Alors :

$$F(p) = \int_{\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}}^0 \frac{-\sqrt{1+p^2}}{1-t^2(1+p^2)+p^2}\,dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}} \frac{\sqrt{1+p^2}}{(1-t^2)(1+p^2)}\,dt = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}} \frac{1}{1-t^2}\,dt .$$

Avec les notations de l'énoncé, on a donc :

$$G(p) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} , \quad a = 0 \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} .$$

(b) La fraction rationnelle $\frac{1}{1-X^2}$ a deux pôles simples, $-1$ et 1. Sa décomposition en éléments simples est donc de la forme :

$$\frac{1}{1-X^2} = \frac{A}{1-X} + \frac{B}{1+X} \ ,$$

où $A$ et $B$ sont des réels. En procédant (par exemple) par identification, on trouve : $A = B = \frac{1}{2}$. On obtient donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\}, \quad \frac{1}{1-t^2} = \frac{1/2}{1-t} + \frac{1/2}{1+t} \ .$$

(c) Le réel $\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$ est strictement compris entre 0 et 1. Donc sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right]$, les fonctions $t \mapsto 1-t$ et $t \mapsto 1+t$ sont strictement positives. On peut donc leur choisir, comme primitives respectives, les fonctions $t \mapsto -\ln(1-t)$ et $t \mapsto \ln(1+t)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
F(p) &= \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}} \frac{1}{1-t^2}\, dt \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1+p^2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1+p^2}} \left[-\ln(1-t) + \ln(1+t)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1+p^2}} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1+p^2}} \ln\left(\frac{\sqrt{1+p^2}+1}{\sqrt{1+p^2}-1}\right) \ .
\end{aligned}$$

## Exercice 3

1. (a) Soit $P_A$ le polynôme caractéristique de la matrice $A$. Soit $I_3$ la matrice identité de taille 3. Par définition, on a :

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 2-X & -1 & 1 \\ 0 & 1-X & 1 \\ -1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} \ .$$

En développant ce déterminant par rapport à la deuxième ligne, on obtient :

$$P_A(X) = (1-X)(X^2-3X+3) - (1-X) = (1-X)(X^2-3X+2) = -(X-1)^2(X-2) \ .$$

(b) Le polynôme $P_A$ admet comme racines : 1 (double) et 2 (simple). Or les valeurs propres de $f$ sont les racines du polynôme caractéristique ; on a donc démontré que $f$ admet deux valeurs propres :

$$\lambda_1 = 2 \text{ (d'ordre de multiplicité 1)} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 1 \text{ (d'ordre de multiplicité 2)} \ .$$

2. On note $\mathcal{U}_{\lambda_1}$ le sous-espace propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2$. Soit $\overrightarrow{u_1}$ un vecteur de $\mathcal{U}_{\lambda_1}$, de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. On a donc, par définition, $f(\overrightarrow{u_1}) = 2\overrightarrow{u_1}$, ce qui s'écrit matriciellement :

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \ .$$

Cette égalité équivaut au système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 - y_1 + z_1 &=& 2x_1 \\ y_1 + z_1 &=& 2y_1 \\ -x_1 + y_1 + z_1 &=& 2z_1 \end{array} \right. \ ,$$

qui lui-même équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ y_1 & = & z_1 \end{array}\right. .$$

On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{u_1}$ appartient à $\mathcal{U}_{\lambda_1}$ si et seulement si ses coordonnées dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ sont de la forme $\begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est donc une base de $\mathcal{U}_{\lambda_1}$. On a donc :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} .$$

On procède de même pour $\mathcal{U}_{\lambda_2}$, le sous-espace propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda_2 = 1$. Soit $\overrightarrow{u_2}$ un vecteur de $\mathcal{U}_{\lambda_2}$, de coordonnées $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. On a donc, par définition, $f(\overrightarrow{u_2}) = \overrightarrow{u_2}$, ce qui s'écrit matriciellement :

$$A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} .$$

Cette égalité équivaut au système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_2 - y_2 + z_2 & = & x_2 \\ y_2 + z_2 & = & y_2 \\ -x_2 + y_2 + z_1 & = & z_2 \end{array}\right. ,$$

qui lui-même équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_2 & = & y_2 \\ z_2 & = & 0 \end{array}\right. .$$

On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{u_2}$ appartient à $\mathcal{U}_{\lambda_2}$ si et seulement si ses coordonnées dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ sont de la forme $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est donc une base de $\mathcal{U}_{\lambda_2}$. On a donc :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} .$$

3. Dans la question 1(b), nous avons vu que la valeur propre $\lambda_2 = 1$ est double ; et dans la question 2, nous avons vu que le sous-espace propre $\mathcal{U}_{\lambda_2}$ associé était de dimension 1. D'après le théorème de cours de diagonalisabilité d'une matrice, ceci implique que la matrice $A$ n'est pas diagonalisable.

4. (a) Considérons la famille de vecteurs $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k}\right)$. Pour montrer que c'est une base de $E$, nous allons montrer que la matrice $P$ de cette famille de vecteurs dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est inversible. Comme on connaît les coordonnées des trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{k}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on peut écrire :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Le déterminant de $P$ se calcule par exemple en développant par rapport à la première ligne. On trouve : $\det(P) = -1 \neq 0$, ce qui montre que $P$ est inversible. On en déduit que la famille $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k}\right)$ est une base de $E$.

(b) D'après les définitions respectives de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a :

$$f(\overrightarrow{u}) = 2\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k} \quad \text{et} \quad f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} .$$

Par ailleurs, $A$ est la matrice de $f$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, donc les coordonnées de $f(\overrightarrow{k})$ se lisent dans la dernière colonne de $A$, elles valent $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a donc :

$$f(\overrightarrow{k}) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}.$$

(c) Toujours d'après les définitions respectives de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a : $f(\overrightarrow{u}) = 2\overrightarrow{u}$ et $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$. Et d'après la question précédente, on a : $f(\overrightarrow{k}) = \underbrace{\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}}_{\overrightarrow{v}} + \overrightarrow{k} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{k}$.

(d) La matrice $B$ de $f$ dans la base $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k}\right)$ contient, dans la première colonne, les coordonnées du vecteur $f(\overrightarrow{u})$ dans la base $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k}\right)$. Comme $f(\overrightarrow{u}) = 2\overrightarrow{u}$, la première colonne sera $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dans la deuxième colonne, on écrit les coordonnées du vecteur $f(\overrightarrow{v})$ dans la base $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k}\right)$. Comme $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$, la deuxième colonne sera $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Enfin, dans la troisième colonne, on écrit les coordonnées du vecteur $f(\overrightarrow{k})$ dans la base $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k}\right)$. Comme $f(\overrightarrow{k}) = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{k}$, la troisième colonne sera $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Les calculs de $B^2$ et $B^3$ donnent :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Au vu de ces matrices, on peut conjecturer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrons-le par récurrence. Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition :

$$B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Initialisation : ici $n = 1$. La proposition $\mathcal{P}_1$ est vraie par définition de $B$.
- Hérédité : soit $n$ un entier strictement positif fixé. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie, et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire que :

$$B^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On sait que : $B^{n+1} = B^n \times B$. On utilise la définition de $B$ et l'expression de $B^n$ donnée par l'hypothèse de récurrence pour effecteur ce produit. On obtient :

$$B^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Conclusion : pour tout entier $n$ strictement positif, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

6. La matrice de passage $P$ de la base $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ à la base $\mathcal{B}' = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k}\right)$ est la matrice de la famille de vecteurs $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k}\right)$ dans la base $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ ; c'est donc la matrice qu'on a définie dans la question 4(a) :
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Le calcul de $P^{-1}$ (par exemple en "renversant" le système $PX = Y$, où $X$ et $Y$ sont des vecteurs colonnes quelconques de $E$) donne :
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. La matrice $B$ est triangulaire supérieure donc son déterminant est donné par le produit de ses termes diagonaux. On obtient : $\det(B) = 2 \neq 0$, ce qui montre que $B$ est inversible. Le calcul de $B^{-1}$ (par exemple en "renversant" le système $BX = Y$, où $X$ et $Y$ sont des vecteurs colonnes quelconques de $E$) donne :
$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
On calcule $B^{-2} = (B^{-1})^2$ et $B^{-3} = (B^{-1})^3$ :
$$B^{-2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^{-3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
On peut alors émettre la conjecture que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B^{-n} = \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Ce résultat se démontre par une récurrence du même type que celle de la question 5, puisque pour $n \in \mathbb{N}^*$, $B^{-(n+1)} = B^{-n} \times B^{-1}$. On obtient donc :
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
La matrice $A$ et la matrice $B$ représentent le même endomorphisme $f$ dans deux bases différentes ; ces deux matrices sont donc semblables, et plus précisément :
$$A = PBP^{-1}.$$
On en déduit alors que :
$$A^{-1} = (P^{-1})^{-1}B^{-1}P^{-1} = PB^{-1}P^{-1},$$
puis que :
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad A^n = PB^nP^{-1}.$$
Le calcul donne :
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad A^n = \begin{pmatrix} n+1 & -n & n \\ n+1-2^n & 2^n-n & n \\ 1-2^n & 2^n-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4**

1. Les deux fonctions cosinus et sinus sont $2\pi$-périodiques, donc $x$ et $y$ sont aussi $2\pi$-périodiques. On en déduit que pour tout réel $t$, le point $M(t+2\pi)$ sera confondu avec le point $M(t)$. Il suffit donc d'étudier les fonctions $x$ et $y$ sur un intervalle de longueur $2\pi$, par exemple $[-\pi\,;\pi]$ pour obtenir l'étude de la courbe en entier.

2. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme la fonction cosinus est paire, on a : $\cos(-t) = \cos(t)$, et comme la fonction sinus est impaire, on a : $\sin(-t) = -\sin(t)$. On en déduit donc que :

$$x(-t) = x(t) \quad \text{et} \quad y(-t) = -y(t)\ .$$

Le point $M(-t)$ est donc le symétrique du point $M(t)$ par rapport à l'axe des abscisses. Ceci étant vrai pour tout réel $t$, on en déduit que la courbe présente une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a : $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$ et $\sin(\pi - t) = \sin(t)$, donc on en déduit que :

$$x(\pi - t) = -x(t) \quad \text{et} \quad y(\pi - t) = y(t)\ .$$

Le point $M(\pi - t)$ est donc le symétrique du point $M(t)$ par rapport à l'axe des ordonnées. Ceci étant vrai pour tout réel $t$, on en déduit que la courbe présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

(c) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t)$, donc on en déduit que :

$$x\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = y(t) \quad \text{et} \quad y\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = x(t)\ .$$

Le point $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ est donc le symétrique du point $M(t)$ par rapport à la droite d'équation $y = x$. Ceci étant vrai pour tout réel $t$, on en déduit que la courbe présente une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3. Le résultat de la question 2(a) nous permet de réduire l'étude sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ à celle sur $[0\,;\pi]$. Puis le résultat de la question 2(b) nous permet de réduire l'étude sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ à celle sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Enfin, le résultat de la question 2(c) nous permet de réduire l'étude sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ à celle sur l'intervalle $I = \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$.

   Une fois le tracé obtenu pour $t$ appartenant à $I$, on effectuera d'abord une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$, puis une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, et enfin une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

4. Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc les fonctions $x$ et $y$, produits de cosinus et sinus, aussi. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = -\sin^3(t) + 2\cos^2(t)\sin(t) = \sin(t)\left(2\cos^2(t) - \sin^2(t)\right)\ ,$$

   et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = \cos^3(t) - 2\sin^2(t)\cos(t) = \cos(t)\left(\cos^2(t) - 2\sin^2(t)\right)\ ;$$

   En utilisant dans les parenthèses la formule $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = \sin(t)\left(3\cos^2(t) - 1\right) \quad \text{et} \quad y'(t) = \cos(t)\left(1 - 3\sin^2(t)\right)\ .$$

   On se place sur l'intervalle $I = \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$. Sur cet intervalle, la fonction cosinus ne s'annule pas, et la fonction sinus ne s'annule qu'en $t = 0$. Par ailleurs l'image de l'intervalle $I = \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ par la fonction cosinus est l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\,;1\right]$, et l'image de l'intervalle $I = \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ par la fonction sinus est l'intervalle $\left[0\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

   Ceci nous permet d'affirmer que l'équation $3\cos^2(t) - 1 = 0$, qui équivaut à l'équation $\cos^2(t) = \frac{1}{3}$, n'a pas de solution dans $I$, puisque ni $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ ni $\sqrt{\frac{1}{3}}$ n'appartiennent à $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\,;1\right]$.

En revanche, l'équation $1 - 3\sin^2(t) = 0$, qui équivaut à l'équation $\sin^2(t) = \frac{1}{3}$, admet exactement une solution notée $t_0$ dans $I$ ; le réel $t_0$ est l'unique élément de $I$ tel que $\sin(t_0) = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

De plus, comme la fonction sinus est strictement croissante sur $I$, on a :

$$\forall t \in [0\,; t_0[, \quad \sin(t) < \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad \forall t \in \left]t_0\,; \frac{\pi}{4}\right[, \quad \sin(t) > \frac{\sqrt{3}}{3}\ .$$

On en déduit le tableau de variation conjoint des fonctions $x$ et $y$ :

| $t$ | $0$ | | $t_0$ | | $\frac{\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | $0$ | $+$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $+$ | $\frac{\sqrt{2}}{4}$ |
| $x$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$ | $\nearrow$ | $\frac{\sqrt{2}}{4}$ |
| $y$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ | $\searrow$ | $\frac{\sqrt{2}}{4}$ |
| $y'(t)$ | $1$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ |

5. On a : $x(0) = 0 = y(0)$, donc le point $M(0)$ a pour coordonnées $(0,0)$.
Puis, en $t_0$, $\sin(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, donc $\cos^2(t_0) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, d'où, puisque $t_0 \in I$, $\cos(t_0) = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Alors : $x(t_0) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$ et $y(t_0) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$. Donc le point $M(t_0)$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$.
Enfin, en $\frac{\pi}{4}$, on a : $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Donc le point $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ a pour coordonnées $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

   Concernant les vecteurs tangents, rappelons le cours : si $t$ est un réel tel que $x'(t)$ et $y'(t)$ ne sont pas tous les deux nuls, alors le vecteur de coordonnées $(x'(t), y'(t))$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe au point $M(t)$.
Nous avons : $x'(0) = 0$ et $y'(0) = 1$, donc le vecteur de coordonnées $(0,1)$ est tangent à la courbe au point $M(0)$.
De plus, $x'(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $y'(t_0) = 0$, donc le vecteur de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ est tangent à la courbe au point $M(t_0)$.
Enfin, $x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ et $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, donc le vecteur de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ est tangent à la courbe au point $M(\frac{\pi}{4})$.
6. Voir la figure sur la dernière page.
7. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $M(t) \neq O$, et soit $(\rho, \theta)$ un couple de coordonnées polaires de $M(t)$. Cela signifie que :

$$\begin{cases} x(t) = \rho\cos(\theta) \\ y(t) = \rho\sin(\theta) \end{cases}.$$

   Alors :

$$\rho^2 = (x(t))^2 + (y(t))^2 = \cos^2(t)\sin^4(t) + \sin^2(t)\cos^4(t) = \cos^2(t)\sin^2(t)\left(\sin^2(t) + \cos^2(t)\right) = \cos^2(t)\sin^2(t)\ .$$

   Par ailleurs, la formule de duplication du sinus donne :

$$\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)\ .$$

Donc :

$$\sin^2(\theta) = 4\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) = 4\,\frac{x^2(t)}{\rho^2}\ \frac{y^2(t)}{\rho^2} = \frac{4\cos^2(t)\sin^4(t)\sin^2(t)\cos^4(t)}{\cos^4(t)\sin^4(t)} = 4\cos^2(t)\sin^2(t) = 4\rho^2\ .$$

8. Comme $\sin(2\theta)$ est toujours compris entre $-1$ et $1$, on déduit de la question précédente que $4\rho^2 \leq 1$, ce qui implique que $\rho \leq \frac{1}{2}$. On en déduit que la courbe est inscrite dans le disque de centre $O$ et de rayon $\frac{1}{2}$.