Correction de l'épreuve de Mathématiques G2E 2011

Problème 1

1. Pour $n = 0$, on a $\lim\limits_{x \to 0^-} f_0(x) = 0$ et $f_0(0) = \lambda^2 > 0$.
   La fonction f_0 n'est donc par continue sur $\mathbf{R}$, et donc pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.

   Pour $n = 1$, on remarque que
   $$\forall t < 0,\ \frac{f_1(t) - f_1(0)}{t - 0} = 0 \quad \text{et que} \quad \forall t > 0,\ \frac{f_1(t) - f_1(0)}{t - 0} = \lambda^2 e^{-\lambda t}.$$
   On a donc $\lim\limits_{t \to 0_-} \dfrac{f_1(t) - f_1(0)}{t - 0} = 0$ et $\lim\limits_{t \to 0_+} \dfrac{f_1(t) - f_1(0)}{t - 0} = \lambda^2 \neq 0$.
   f_1 n'est donc pas dérivable en 0 et donc pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.

   Soit alors $n \geq 2$. f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^*$, comme fonction constante sur $\mathbf{R}_-^*$ et comme produit de composée de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur leur domaine respectif sur $\mathbf{R}_+^*$.
   Comme $n \geq 1$, on remarque que $\lim\limits_{0_+} f_n = \lim\limits_{0_-} f_n = f_n(0) = 0$ et f_n est donc continue sur $\mathbf{R}$.
   On remarque ensuite que
   $$\forall t < 0,\ f_n'(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t > 0,\ f_n'(t) = \lambda^2 t^{n-1}(n - \lambda t)e^{-\lambda t}.$$
   Comme $n \geq 2$, on a donc $\lim\limits_{0_-} f_n' = \lim\limits_{0_+} f_n' = 0$.
   D'après le théorème de prolongement de la dérivée, f_n est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.
   Conclusion $\boxed{f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbf{R} \text{ si et seulement si } n \geq 2.}$

2. Soit $n \geq 0$. Comme f_n est continue sur $[0; +\infty[$ et admet une primitive de la forme $t \mapsto P(t)e^{-\lambda t}$, on a
   $$\forall A > 0,\ \int_0^A f_n(t) = \left[P(t)e^{-\lambda t}\right]_0^A = P(A)e^{-\lambda A} - P(0).$$
   Or, d'après les croissances comparées, et comme $\lambda > 0$, on a $\lim\limits_{A \to +\infty} P(A)e^{-\lambda A} = 0$.

   $$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbf{N}, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t \text{ est donc convergente.}}$$

   En utilisant le théorème de comparaison, admettre la forme de la primitive n'était néanmoins pas nécessaire.

   Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $A > 0$, on effectue une intégration par parties, avec $u(t) = e^{-\lambda t}$ et $v'(t) = t^n$.
   $$\int_0^A f_n(t)\mathrm{d}t = \lambda^2 \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}e^{-\lambda t}\right]_0^A - \lambda^2 \int_0^A \frac{t^{n+1}}{n+1}(-\lambda)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \lambda^2 \frac{A^{n+1}}{n+1}e^{-\lambda A} + \frac{\lambda}{n+1}\int_0^A f_{n+1}(t)\mathrm{d}t$$
   Comme d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{n} A^n e^{-\lambda A} = 0$, on a donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ \int_0^{+\infty} f_{n+1}(t)\mathrm{d}t = \frac{n+1}{\lambda}\int_0^{+\infty} f_n\mathrm{d}t.}$$

3. On commence par calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_0(t)\mathrm{d}t = \lambda$.
   Ensuite, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_1(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\lambda = 1$, puis $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_2(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\lambda}$, et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_3(t)\mathrm{d}t = \frac{3\times 2}{\lambda^2}$.
   On montre alors par récurrence que $\displaystyle\forall n \in \mathbf{N},\ \int_0^{+\infty} f_n(t) = n!\,\lambda^{1-n}$.
   L'initialisation a été vue dans les calculs ci-dessus, l'hérédité est conséquence de la question 2.
   Conclusion : $\boxed{\displaystyle\forall n \in \mathbf{N},\ \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = n!\,\lambda^{1-n}\ .}$
4. Comme f_1 est une fonction positive, continue sur $\mathbf{R}$, d'intégrale 1 sur $\mathbf{R}$ (question précédente), $\boxed{f_1 \text{ est une densité de probabilité.}}$
5. On remarque que f_2 et f_3 admettant des intégrales convergentes sur $\mathbf{R}$ les variables T_i admettent des moments d'ordre 1 et 2. En effet,

   $$tf(t) = f_2(t) \quad \text{et} \quad t^2 f(t) = f_3(t).$$

   Ces fonctions sont bien intégrables sur $\mathbf{R}$ car nulles sur $\mathbf{R}_+^*$ et intégrables sur $\mathbf{R}_+$ d'après la question 2. On a de plus

   $$\mathbf{E}(T_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_2(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(T_i^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_3(t)\mathrm{d}t = \frac{6}{\lambda^2}.$$

   On a donc, d'après la formule de Koenig-Huygens, $\mathbf{V}(T_i) = \mathbf{E}(T_i^2) - \big(\mathbf{E}(T_i)\big)^2 = \frac{6}{\lambda^2} - \frac{4}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$.

   $$\boxed{\text{Pour } i \in [\![1,p]\!],\ T_i \text{ admet donc une espérance et une variance et } \mathbf{E}(T_i) = \frac{2}{\lambda} \text{ et } \mathbf{V}(T_i) = \frac{2}{\lambda^2}.}$$
6. Le système S tombant en panne dès qu'un de ces composant tombe en panne, l'instant T où S tombe en panne est donc la plus petite durée de vie de ses composants, i.e.

   $$T = \min\{T_1, \dots, T_p\}.$$

   On commence par calculer la fonction de répartition de T_1.
   Soit $t \in \mathbf{R}$, on calcule alors

   $$\begin{aligned} F_T(t) &= \mathbf{P}(T \leq t) = 1 - \mathbf{P}(T > t) = 1 - \mathbf{P}(T_1 > t, \dots, T_p > t) \\ &= 1 - \mathbf{P}(T_1 > t) \times \cdots \times \mathbf{P}(T_p > t) \quad \text{les variables } T_i \text{ étant indépendantes} \\ &= 1 - \big(1 - F_{T_1}(t)\big)^p \quad \text{les variables } T_i \text{ suivant la même loi} \end{aligned}$$

   On cherche alors la fonction de répartition de T_1 :
   comme $\forall t < 0,\ f(t) = 0$, on a $\forall t < 0,\ F_{T_1}(t) = 0$;
   si $t \geq 0$, on a $F_{T_1}(t) = \mathbf{P}(T_1 \leq t) = \displaystyle\int_0^t f(s)\mathrm{d}s = \int_0^t \lambda^2 s e^{-\lambda s}\mathrm{d}s$.
   On calcule alors cette intégrale avec une intégration par parties :

   $$\int_0^t \lambda^2 s e^{-\lambda s}\mathrm{d}s = [-\lambda s e^{-\lambda s}]_0^t - \int_0^t (-\lambda) e^{-\lambda s}\mathrm{d}s = -\lambda t e^{-\lambda t} - [e^{-\lambda s}]_0^t = 1 - (1+\lambda t)e^{-\lambda t}$$

On a donc $\boxed{\forall t \in \mathbf{R},\ F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - (1+\lambda t)^p e^{-p\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}.}$

On remarque alors que F_T est continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ sauf peut-être en 0. La variable T est donc une variable à densité et $\boxed{\forall t \in \mathbf{R},\ f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda^2 tp(1+\lambda t)^{p-1} e^{-p\lambda t} & \end{cases}.}$

7. Cette fois, on a $W = \max(T_1, T_2)$, le temps de la panne étant l'instant où les deux composants du systèmes ont cessé de fonctionner.
Si $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} F_W(t) &= \mathbf{P}(W \leq t) = \mathbf{P}(T_1 \leq t, T_2 \leq t) \\ &= \mathbf{P}(T_1 \leq t) \times \mathbf{P}(T_2 \leq t) \quad \text{car } T_1 \text{ et } T_2 \text{ sont indépendantes} \\ &= \mathbf{P}(T_1 \leq t)^2 \quad \text{car } T_1 \text{ et } T_2 \text{ suivent la même loi} \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{\forall t \in \mathbf{R},\ F_W(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \left(1 - (1+\lambda t)e^{-\lambda t}\right)^2 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}}$ Comme F_W est continue sur $\mathbf{R}$ et dérivable sauf peut-être en 0, W est une variable à densité et une densité de W est

$\boxed{\forall t \in \mathbf{R},\ f_W(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2\lambda^2 t e^{-\lambda t}\left(1 - (1+\lambda t)e^{-\lambda t}\right) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}}$

8. Soit $t \in \mathbf{R}$.
On remarque que si $(T_1 \geq t)$, alors le premier composant fonctionne au moins jusqu'au temps t et donc le système V aussi. On a donc $(T_1 \geq t) \subset (W \geq t)$.
On remarque aussi que si $(T \geq t)$, alors le système S fonctionne au moins jusqu'au temps t, et donc que tous ses composants fonctionnent au moins jusqu'au temps t.
On a donc $(T \geq t) \subset (T_1 \geq t)$.
Le même raisonnement est valable pour le second composant, d'où

$$\forall t \in \mathbf{R},\ \forall i \in \{1;2\},\ (T \geq t) \subset (T_i \geq t) \subset (W \geq t).$$

On a donc en particulier $\boxed{\forall t \in \mathbf{R},\ \forall i \in \{1;2\},\ \mathbf{P}(T \geq t) \leq \mathbf{P}(T_i \geq t) \leq \mathbf{P}(W \geq t).}$
La probabilité que V fonctionne au moins jusqu'au temps t est supérieure à celle de S et donc $\boxed{\text{le système } V \text{ est plus fiable que le système } S.}$

9. a. On considère les événements
$\forall i \in [\![1, p]\!],\ A_i$: « l'élément tiré au hasard a pour durée de vie T_i »
$\forall j \in [\![1, q]\!],\ B_j$: « l'élément tiré au hasard a pour durée de vie U_j ».
Comme on tire un et un seul élément, la famille $(A_1, \ldots, A_p, B_1, \ldots, B_q)$ est un système complet d'événements. Qui plus est, tous les éléments ayant *a priori* la même probabilité d'être tiré au hasard, on a, d'après la formule des probabilités totales,

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ \mathbf{P}(A_i) = \frac{1}{p+q} \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![1, q]\!],\ \mathbf{P}(B_j) = \frac{1}{p+q}$$

Soit alors $t \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \leq t) &= \sum_{i=1}^{p} \mathbf{P}(X \leq t \cap A_i) + \sum_{j=1}^{q} \mathbf{P}(X \leq t \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \mathbf{P}(X \leq t | A_i)\mathbf{P}(A_i) + \sum_{j=1}^{q} \mathbf{P}(X \leq t | B_j)\mathbf{P}(B_j) \\
&= \frac{1}{p+q}\left(\sum_{i=1}^{p} \mathbf{P}(T_i \leq t) + \sum_{j=1}^{q} \mathbf{P}(U_j \leq t)\right) \\
&= \frac{p}{p+q} F_{T_1}(t) + \frac{q}{p+q} F_{U_1}(t)
\end{aligned}$$

La fonction F_X est donc continue sur $\mathbf{R}$ et dérivable sauf peut-être en 0. X est donc une variable aléatoire à densité et une densité de X est donnée par

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R},\ f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{p}{p+q}\lambda^2 t e^{-\lambda t} + \dfrac{q}{p+q}\mu^2 t e^{-\mu t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}}$$

b. Soit $A \geq 0$. On calcule

$$\int_0^A t f_X(t)\mathrm{d}t = \frac{p}{p+q}\int_0^A t f_{T_1}(t)\mathrm{d}t + \frac{q}{p+q}\int_0^A t f_{U_1}(t)\mathrm{d}t$$

Mais $\lim\limits_{A \to +\infty} \displaystyle\int_0^A t f_{T_1}(t)\mathrm{d}t = \mathbf{E}(T_1) = \frac{2}{\lambda}$ et $\lim\limits_{A \to +\infty} \displaystyle\int_0^A t f_{U_1}(t)\mathrm{d}t = \mathbf{E}(U_1) = \frac{2}{\mu}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)dt$ est donc convergente.

$$\boxed{X \text{ admet donc une espérance et } \mathbf{E}(X) = \frac{p}{p+q} \times \frac{2}{\lambda} + \frac{q}{p+q} \times \frac{2}{\mu}.}$$

c. On suit le même raisonnement pour montrer que X admet une moment d'ordre 2. Soit $A \geq 0$. On calcule

$$\int_0^A t^2 f_X(t)\mathrm{d}t = \frac{p}{p+q}\int_0^A t^2 f_{T_1}(t)\mathrm{d}t + \frac{q}{p+q}\int_0^A t^2 f_{U_1}(t)\mathrm{d}t.$$

Or, on a vu à la question 1.5 que

$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A t^2 f_{T_1}(t)\mathrm{d}t = \frac{6}{\lambda^2} \quad \text{et que} \quad \lim_{A \to +\infty} \int_0^A t^2 f_{U_1}(t)\mathrm{d}t = \frac{6}{\mu^2}.$$

On en déduit donc que X admet un moment centré d'ordre 2 et que

$$\mathbf{E}(X^2) = \frac{p}{p+q} \times \frac{6}{\lambda^2} + \frac{q}{p+q} \times \frac{6}{\mu^2}.$$

$\boxed{X \text{ admet donc une variance}}$ et

$$\boxed{\mathbf{V}(X) = \frac{p}{p+q} \times \frac{6}{\lambda^2} + \frac{q}{p+q} \times \frac{6}{\mu^2} - \left(\frac{p}{p+q} \times \frac{2}{\lambda} + \frac{q}{p+q} \times \frac{2}{\mu}\right)^2}$$

Problème 2

1. a. Montrons que f est linéaire :
Soient $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^2$. On calcule
$$f(u+v) = f\big((x+x', y+y')\big) = (-y-y', x+x') = (-y, x) + (-y', x') = f(u) + f(v).$$
f conserve donc l'addition.
Soient $u = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On calcule
$$f(\lambda u) = f(\lambda x, \lambda y) = (-\lambda y, \lambda x) = \lambda(-y, x) = \lambda f(u).$$
f conserve donc la multiplication par les scalaires.
Comme de plus f est définie et à valeurs dans $\mathbf{R}^2$, on a $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbf{R}^2.}$
Posons alors $v_0 = (1, 0)$, $v_1 = (0, 1)$, $v_2 = (-1, 0)$ et $v_3 = (0, -1)$. Alors la famille (v_0, v_1, v_2, v_3) est comme désirée. En effet, on peut vérifier que
$$v_1 = f(v_0), \quad v_2 = f(v_1), \quad v_3 = f(v_2) \quad \text{et} \quad v_0 = f(v_3).$$
Qui plus est, (v_0, v_1, v_2, v_3) est bien génératrice de $\mathbf{R}^2$ puisqu'elle contient (v_0, v_1), la base canonique de $\mathbf{R}^2$.
$\boxed{\text{La famille } (v_0, v_1, v_2, v_3) \text{ vérifie les propriétés demandées.}}$

   b. Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbf{R}^2$. On a alors $\boxed{\mathcal{M}_{(e_1,e_2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$ Pour déterminer les valeurs propres de M, on se donne $\lambda \in \mathbf{R}$ et on calcule $\operatorname{Rg}(M - \lambda I_2)$:
$$\begin{aligned} \operatorname{Rg}(M - \lambda I_2) &= \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ -\lambda & -1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_1 \\ &= \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & -1-\lambda^2 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_2 + \lambda L_1 \end{aligned}$$
On en déduit que $\operatorname{Rg}(f - \lambda I_E) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = \pm i \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$.
$\boxed{M \text{ admet donc } i \text{ et } -i \text{ comme valeurs propres}}$.

2. On revient ici au cas général (ceci n'est pas précisé par l'énoncé).
On peut commencer par montrer par récurrence que
$$\forall i \in [\![0; n-1]\!],\ v_i = f^i(v_0).$$
L'initialisation est évidente puisque $f^0 = I_E$. L'hérédité vient de ce que $v_{i+1} = f(v_i)$.
Montrons que $f^n = I_E$
On a $v_0 = v_n = f^n(v_0)$. Alors, si $i \in [\![0; n-1]\!]$, on a
$$v_i = f^i(v_0) = f^i \circ f^n(v_0) = f^n \circ f^i(v_0) = f^n(v_i).$$
Mais la famille $(v_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ est génératrice de E. On peut donc extraire une base de E constituée de v_i : (v_i, v_j) puisque E est de dimension 2. On a alors
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, f^n(\lambda v_i + \mu v_j) = \lambda f^n(v_i) + \mu f^n(v_j) = \lambda v_i + \mu v_j$$

et donc $f^n = I_E$.
Soit alors $0 < p < n$. Montrons *par l'absurde* que $f^p \neq I_E$.
Si c'était le cas, on aurait $v_p = f^p(v_0) = v_0$ mais les $(v_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ sont deux à deux distincts.
On a donc $\boxed{f^n = I_E \text{ et } \forall p \in [\![1; n-1]\!],\ f^p \neq I_E.}$

3. Soit alors λ une valeur propre (complexe) de f. Comme $f^n = I_E$, on a forcément $\lambda^n = 1$ (en effet, si u est un vecteur propre associé (complexe) associé à λ, on a $u = I_E(u) = f^n(u) = \lambda^n u$) et donc : $\boxed{\text{les valeurs propres (complexes) possibles de } f \text{ sont les } e^{2ip\pi/n},\ p \in [\![0; n-1]\!].}$

4. Soit $i_0 \in [\![0; n]\!]$. Supposons *par l'absurde* v_{i_0} vecteur propre de f. Alors tous les v_i sont colinéaires à v_{i_0}, car
$$v_{i_0+1} = f(v_{i_0}), \ldots, v_0 = f^{n-i_0}(v_{i_0}), \ldots$$
et la famille $(v_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ ne peut être génératrice de E.
$\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![0; n-1]\!],\ v_i \text{ n'est vecteur propre de } f.}$

5. Soit $i \in [\![0; n-1]\!]$. Comme v_i n'est pas vecteur propre de f, $v_{i+1} = f(v_i)$ ne peut être colinéaire à v_i (aucun des deux ne peut s'annuler sans quoi tous les v_i seraient nuls). La famille (v_i, v_{i+1}) est donc libre.
Or, (v_i, v_{i+1}) est une famille libre de E constituée de 2 vecteurs et $\dim E = 2$.
$\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![0; n-1]\!],\ (v_i, v_{i+1}) \text{ est donc une base de } E.}$ On calcule alors
$$f(v_i) = v_{i+1} = 0 \times v_i + 1 \times v_{i+1}$$
Et comme (v_i, v_{i+1}) est une base de E, le vecteur $f(v_{i+1})$ s'écrit bien $a_i v_i + b_i v_{i+1}$.
On a donc $\boxed{M_i = \mathcal{M}_{(v_i, v_{i+1})}(f) = \begin{pmatrix} 0 & a_i \\ 1 & b_i \end{pmatrix}.}$

6. Soit $i \in [\![0; n-2]\!]$. On a
$$f(v_{i+1}) = a_i v_i + b_i v_{i+1}$$
d'où
$$f(v_{i+2}) = f \circ f(v_{i+1}) = a_i f(v_i) + b_i f(v_{i+1}) = a_i v_{i+1} + b_i v_{i+2}$$
On a alors immédiatement que $\forall i \in [\![0; n-2]\!],\ M_i = M_{i+1}$.
Par récurrence, on montre alors que toutes les matrices M_i sont identiques.
$\boxed{\text{Si } i, j \in [\![0; n-1]\!], \text{ alors } M_i = M_j.}$

Problème 3

Partie A

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. De $u_n = a u_{n+1} + (1-a) u_{n-1}$ on déduit $a(u_{n+1} - u_n) = (1-a)(u_n - u_{n-1})$
On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*,\ v_n = \frac{1-a}{a} v_{n-1}.}$
$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ est donc géométrique de raison } r = \frac{1-a}{a}.}$
$(v_n)_n$ est alors constante si et seulement si $\dfrac{1-a}{a} = 1$, i.e si et seulement si $1 - a = a$, i.e. si et seulement si $a = 1/2$.

On a alors, $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_1 - u_0 = u_1$.
La suite $(u_n)_n$ est alors arithmétique de raison u_1 et donc $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = u_0 + nu_1 = nu_1$.

$\boxed{(v_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est constante si et seulement si } a = 1/2. \text{ Alors, } \forall n \in \mathbf{N},\ u_n = nu_1.}$

Les relations demandées sur $\mathbf{N}^*$ par l'énoncé sont en réalité valables sur $\mathbf{N}$.

2. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

$$u_{n+1} = 1 \times u_{n+1} + 0 \times u_n \quad \text{et} \quad u_{n+2} = \frac{1}{a}\big(u_{n+1} - (1-a)u_n\big)$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1-a}{a} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{La matrice } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1-a}{a} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ vérifie } \forall n \in \mathbf{N},\ U_{n+1} = AU_n.}$$

3. Soit $a \in]0;1[$. On calcule

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} - \frac{1-a}{a} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Pour tout } a \in]0;1[, \text{ 1 est valeur propre de } A.}$

Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On calcule

$$\mathrm{Rg}(A - \lambda I_2) = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} - \lambda & -\frac{1-a}{a} \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 0 & -1/a + 1 + \lambda/a - \lambda^2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - (1/a - \lambda)L_2$$

Or, on a $-1/a + 1 + \lambda/a - \lambda^2 = -(\lambda - 1)(\lambda + 1 - 1/a)$ On a donc

$$\mathrm{Rg}(A - \lambda I_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = 1 \\ 1 & \text{si } \lambda = 1/a - 1 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier, si $1 \neq 1/a - 1$, i.e $a \neq 1/2$, la matrice A est bien diagonalisable, puisque d'ordre 2 et ayant deux valeurs propres distinctes.
En revanche, si $a = 1/2$, la matrice A n'est pas diagonalisable, puisque son seul sous-espace propre (celui associé à 1) est uniquement de dimension 1.

$\boxed{A \text{ est diagonalisable si et seulement si } a \neq a_0 \text{ où } a_0 = 1/2.}$

4. Soit alors $a \neq 1/2$.
On a vu que $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
On cherche alors un vecteur propre associé à la valeur propre $1/a - 1$. On résout donc

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1/a - 1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{(1-a)y}{a} = \frac{1-a}{a}x \\ x = \frac{1-a}{a}y \end{cases} \quad \text{ssi} \quad x = \frac{1-a}{a}y$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 1-a \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $1/a-1$.
En posant alors $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/a-1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1-a \\ 1 & a \end{pmatrix}$, on a donc $AP = PD$.
La matrice P est inversible car c'est la matrice d'une base de $\mathbf{R}^2$ (famille de deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes dans $\mathbf{R}^2$).

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/a-1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1-a \\ 1 & a \end{pmatrix} \text{ vérifient } A = PDP^{-1}.}$$

5. On suppose encore que $a \neq 1/2$.
On vérifie alors, par récurrence, que $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n = A^n U_0$, et que $\forall n \in \mathbf{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.
Or, comme D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1/a-1)^n \end{pmatrix}$.
De ce que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1/a-1)^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$ on déduit qu'il existe A et B réels tels que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = A + B(1/a-1)^n.$$

De ce que $u_0 = 0$, on a $A + B = 0$ et donc

$$u_1 = A - A(1/a-1) = A(2-1/a) = A\frac{2a-1}{a}$$

On a donc $A = \dfrac{au_1}{2a-1}$. On a donc $\boxed{\text{Si } a \neq 1/2,\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \frac{au_1}{2a-1}\big(1-(1/a-1)^n\big).}$
Ce résultat aurait pu être obtenu en utilisant des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

6. On suppose que $n_0 > 1$ vérifie $u_{n_0} = 1$ (et que l'on se trouve toujours dans le cas $a \neq 1/2$).
Alors $\dfrac{au_1}{2a-1}\big(1-(1/a-1)^{n_0}\big) = 1$.
On a donc $\boxed{u_1 = \frac{2a-1}{a\big(1-(1/a-1)^{n_0}\big)}.}$
On en déduit que $\boxed{\text{si } a \neq 1/2,\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \frac{1-(1/a-1)^n}{1-(1/a-1)^{n_0}}.}$
Si l'on suppose cette fois que l'on est dans la situation où $a = 1/2$, on a donc

$$1 = u_{n_0} = n_0 u_1$$

et donc $\boxed{\text{si } a = 1/2,\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \frac{n}{n_0}.}$

Partie B

7. Considérons l'événement $U_{n,k}$: « le joueur gagne n euros ».
On pose aussi A_1 : « le résultat de la première expérience est A. ».
On peut décomposer l'événement $U_{n,k}$ dans le système complet d'événements $(A_1, \overline{A_1})$.

$$\mathbf{P}(U_{n,k}) = \mathbf{P}(U_{n,k}|A_1)\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(U_{n,k}|\overline{A_1})\mathbf{P}(\overline{A_1}).$$

Maintenant, d'après l'énoncé $\mathbf{P}(U_{n,k}) = p_{n,k}$.
Par contre, on a $\mathbf{P}(U_{n,k}|A_1) = p_{n,k+1}$, car sachant A_1, c'est à dire sachant que la première

expérience a rapporté 1 euros, on peut supposer que le jeu commence cette fois à la fin de la première expérience mais qu'alors le capital du joueur est $k+1$ euros.
De même, on peut interpréter $\mathbf{P}(U_{n,k}|\overline{A_1})$ comme $p_{n,k-1}$.
On a donc $\boxed{\forall k \geq 1,\ p_{n,k} = ap_{n,k+1} + (1-a)p_{n,k-1}.}$
Mais en appliquant la formule des probabilités totales à l'événement
$V_{n,k}$: « le joueur finit ruiné » avec le même système complet, on a

$$\mathbf{P}(V_{n,k}) = \mathbf{P}(V_{n,k}|A_1)\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(V_{n,k}|\overline{A_1})\mathbf{P}(\overline{A_1}).$$

En suivant des interprétations similaires aux précédentes,
on a $\boxed{\forall k \geq 1,\ q_{n,k} = aq_{n,k+1} + (1-a)q_{n,k-1}.}$

8. On remarque que $p_{n,0} = 0$ et que $p_{n,n} = 1$. On utilise alors la question 3.6 :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{si } a \neq 1/2,\ \forall k \in [\![0;n]\!],\ p_{n,k} = \dfrac{1-(1/a-1)^k}{1-(1/a-1)^n}. \\ \text{si } a = 1/2,\ \forall k \in [\![0;n]\!],\ p_{n,k} = \dfrac{k}{n}. \end{array}}$$

On ne peut néanmoins appliquer la partie A directement à $q_{n,k}$ puisque $q_{n,0} = 1$ et $q_{n,n} = 0$.
Néanmoins, q vérifiant la même relation de récurrence s'écrit aussi (on suppose ici $a \neq 1/2$)

$$\forall k \in \mathbf{N},\ q_{n,k} = A + B(1/a-1)^k.$$

De $q_{n,0} = 1$, on a $A + B = 1$ et donc $\forall k,\ q_{n,k} = 1 - B + B(1/a-1)^k$.
De $q_{n,n} = 0$, on a $1 = B\big(1-(1/a-1)^n\big)$ et donc $\forall k \in [\![0;n]\!],\ q_{n,k} = 1 - \dfrac{1-(1/a-1)^k}{1-(1/a-1)^n}$.
Dans le cas où $a = 1/2$, on a encore $(q_{n,k})_k$ arithmétique et donc, $\forall k,\ q_{n,k} = Ak + B$.
De ce que $q_{n,0} = 1$ et $q_{n,n} = 0$, on a $B = 1$ et $An + 1 = 0$ d'où $A = -1/n$.
On a donc $\forall k \in [\![0;n]\!],\ q_{n,k} = -\dfrac{k}{n} + 1$.

En conclusion, $\boxed{\begin{array}{l} \text{si } a \neq 1/2,\ \forall k \in [\![0;n]\!],\ q_{n,k} = 1 - \dfrac{1-(1/a-1)^k}{1-(1/a-1)^n} \\ \text{si } a = 1/2,\ \forall k \in [\![0;n]\!],\ q_{n,k} = -\dfrac{k}{n} + 1. \end{array}}$

9. Si $a = 1/2$, on a clairement $\lim\limits_{n \to +\infty} p_{n,k} = 0$.
Si $a > 1/2$, on a $0 < 1/a < 2$ et donc $-1 < 1/a - 1 < 1$. On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_{n,k} = 1 - (1/a-1)^k$.
Si $a < 1/2$, on a $1/a > 2$ et donc $1/a - 1 > 1$. On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_{n,k} = 0$.

En conclusion, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} p_{n,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq 1/2 \\ 1-(1/a-1)^k & \text{sinon} \end{cases}.}$

Si $a \leq 1/2$, la probabilité que le joueur puisse atteindre un gain aussi haut que désiré est nulle.
En revanche, si $a > 1/2$, cette probabilité est non nulle.

10. *A priori*, ces événements ne forment pas un système complet d'événement dans la mesure où le jeu peut donner lieu à une infinité d'expériences si gains et pertes se compensent.
En revanche, on remarque que (quel que soit a)

$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ p_{n,k} + q_{n,k} = 1$$

$p_{n,k}$ désignant la probabilité de « le joueur gagne n euros » et $q_{n,k}$ la probabilité de « le joueur finit ruiné », et ces deux événements étant incompatibles, $p_{n,k} + q_{n,k}$ désigne en réalité la probabilité que « la partie se termine. »

$\boxed{\text{« la partie se termine » est un événement presque certain.}}$

11. a. Pour que le joueur gagne, il faut et il suffit qu'il ait 5 euros. L'expérience doit donc amener deux fois le résultat A de plus du résultat B.
En notant :
G_6 : « le joueur gagne en moins de 6 coups »,
A_i : l'expérience i amène A,
B_i : l'expérience i amène B ($B_i = \overline{A_i}$) on trouve alors que

$$\begin{aligned} G_6 = &(A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \cup (A_1 \cap B_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &\cup (B_1 \cap A_2 \cap B_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6) \cup (B_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap B_4 \cap A_5 \cap A_6) \\ &\cup (A_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6) \cup (A_1 \cap B_2 \cap A_3 \cap B_4 \cap A_5 \cap A_6) \\ &\cup (B_1 \cap B_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6) \end{aligned}$$

En remarquant qu'il s'agit d'une union d'événements deux à deux incompatibles et en utilisant la formule des probabilités composées pour calculer chacun d'entre eux, on a

$$\mathbf{P}(G_6) = a^2 + 2a^3(1-a) + 5a^4(1-a)^2.$$

Comme $a = \dfrac{1}{2}$, $\boxed{\text{la probabilité que le joueur gagne en moins de 6 coups est } \dfrac{29}{64}.}$

b. Pour que le joueur perde, il faut qu'il n'ait plus d'argent, l'expérience doit donc amener trois B de plus que de A. En notant
P_6 : « le joueur perd en moins de 6 coups »,
on trouve que

$$\begin{aligned} P_6 = &(B_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup (A_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5) \\ &\cup (B_1 \cap A_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5) \cup (B_1 \cap B_2 \cap A_3 \cap B_4 \cap B_5) \end{aligned}$$

En suivant le même raisonnement que dans la question précédente, on a

$$\mathbf{P}(P_6) = (1-a)^3 + 3a(1-a)^4.$$

Comme $a = \dfrac{1}{2}$, $\boxed{\text{la probabilité que le joueur perde en moins de 6 coups est } \dfrac{7}{32}.}$

c. Si on note J_7 « le joueur joue au moins 7 coups », la famille (G_6, P_6, J_7) forme alors un système complet d'événements, et donc

$$\boxed{\mathbf{P}(J_7) = 1 - \mathbf{P}(P_6) - \mathbf{P}(G_6) = \frac{21}{64}.}$$