
PROBLÈME 1

Ce problème est fortement inspiré d'une partie de l'épreuve ESSEC II 2001 (section ECS).

1.1. a) La relation $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$ (formule de Pascal), est connue de tout bon BCPST.

Elle se démontre sans douleur :

$$\begin{aligned}\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!}\\ &= \frac{n!}{(p+1)!(n-p)!}(p+1+n-p)\\ &= \frac{(n+1)!}{(p+1)!((n+1)-(p+1))!},\end{aligned}$$

d'où : $\boxed{\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}}$.

b) • $\binom{0+1}{0+1} = 1 = \binom{0}{0} = \sum_{k=0}^{k=0}\binom{k}{0}$, l'égalité $\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{k=n}\binom{k}{p}$ est donc vraie pour $(n,p) = (0,0)$.

De la même façon, $\binom{1+1}{0+1} = 2 = \binom{1}{0} + \binom{1}{0} = \sum_{k=0}^{k=1}\binom{k}{0}$, on a donc bien $\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{k=n}\binom{k}{p}$ lorsque $(n,p) = (1,0)$.

Enfin, $\binom{1+1}{1+1} = 1 = \binom{1}{1} = \sum_{k=1}^{k=1}\binom{k}{1}$: $\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{k=n}\binom{k}{p}$ est également vrai pour $(n,p) = (1,1)$.

•• On considère maintenant, comme l'énoncé le demande, un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall\ p \in [\![0, n]\!],\ \binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{k=n}\binom{k}{p} \qquad (*).$$

Alors pour tout $p \in [\![0, n]\!]$:

$$\sum_{k=p}^{k=n+1}\binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{k=n}\binom{k}{p} + \binom{n+1}{p}$$
$$= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} \quad \text{d'après } (*)$$
$$= \binom{n+2}{p+1} \quad \text{d'après a)},$$

on a donc bien $\boxed{\binom{n+2}{p+1} = \sum_{k=p}^{k=n+1}\binom{k}{p}}$.

• • • On conclut en détaillant la récurrence suggérée :

Hypothèse

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété $\mathcal{H}(n)$ par :

$$\mathcal{H}(n) \Leftrightarrow \forall\ p \in [\![0, n]\!],\ \binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{k=n}\binom{k}{p}.$$

Initialisation

On a montré que $\binom{0+1}{0+1} = 1 = \binom{0}{0} = \sum_{k=0}^{k=0}\binom{k}{0}$. On a donc

$$\mathcal{H}(0):\ \forall\ p \in [\![0, 0]\!],\ \binom{0+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{k=0}\binom{k}{p}.$$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons $\mathcal{H}(n)$. Alors pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{k=n}\binom{k}{p}$; par conséquent, d'après • • : $\forall\ p \in [\![0, n]\!], \binom{n+2}{p+1} = \sum_{k=p}^{k=n+1}\binom{k}{p}$.

On a par ailleurs $\binom{n+2}{n+2} = 1 = \sum_{k=n+1}^{k=n+1}\binom{k}{p}$, d'où $\mathcal{H}(n+1)$:

$$\forall\ p \in [\![0, n+1]\!], \binom{n+2}{p+1} = \sum_{k=p}^{k=n+1}\binom{k}{p}.$$

Conclusion

$\mathcal{H}(0)$ est vérifiée, et la propriété $\mathcal{H}$ est héréditaire, le principe du raisonnement par récurrence assure donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{H}(n)$:

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ p \in [\![0, n]\!],\ \binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{k=n} \binom{k}{p}}.$$

c) • En choisissant $p = 1$ dans la relation précédente, il vient :

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{k=n} \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2}$, soit $\boxed{S_1 = \sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$, ce que le cours confirme.

•• Si l'on prend maintenant $p = 2$, on trouve : $\forall\ n \geq 2,\ \sum_{k=2}^{k=n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$, d'où

$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$ (le terme d'indice 1 ajouté à la somme est nul).

On en déduit que $\boxed{S_2 = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}}$, et l'on remarque que cette formule reste trivialement valable dans le cas où $n = 1$.

••• On choisit enfin $p = 3$, et l'on a : $\forall\ n \geq 3,\ \sum_{k=3}^{k=n} \binom{k}{3} = \binom{n+1}{4}$. Là encore, on peut ajouter les termes d'indice 1 et 2 (nuls) à la somme obtenue, et, en explicitant les coefficients binomiaux, on aboutit à l'égalité $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k(k-1)(k-2)}{6} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24}$,

d'où $\boxed{S_3 = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}}$.

A nouveau, on achève en remarquant que le résultat reste correct lorsque $n = 1$ ou $n = 2$.

1.2. • Soit donc $j \in [\![2, n]\!]$; l'évènement $(Y \leq j)$ est réalisé si et seulement le plus grand des deux numéros tirés est inférieur ou égal à j, donc si et seulement si les numéros tirés sont tous deux inférieurs ou égaux à j.

Il y a $\binom{j}{2}$ façons de choisir deux numéros distincts entre 1 et j, et au total $\binom{n}{2}$ choix possibles de deux numéros distincts entre 1 et n ; tous ces choix étant équiprobables, on a bien

$$\boxed{P(Y \leq j) = \frac{\binom{j}{2}}{\binom{n}{2}}}.$$

Ce résultat reste vrai lorsque $j = 1$: puisque l'on choisit deux numéros distincts entre 1 et n, le plus grand des deux est au moins égal à 2, d'où $\boxed{P(Y \leq 1) = 0 = \dfrac{\binom{1}{2}}{\binom{n}{2}}}$.

- • On déduit de ce qui précède que pour tout $j \in [\![2, n]\!]$:

$$\begin{aligned} P(Y = j) &= P(Y \leq j) - P(Y \leq j - 1) \\ &= \frac{\binom{j}{2} - \binom{j-1}{2}}{\binom{n}{2}} \\ &= \frac{\binom{j-1}{1} + \binom{j-1}{2} - \binom{j-1}{2}}{\binom{n}{2}} \qquad \text{d'après a)}, \end{aligned}$$

et ainsi $\boxed{P(Y = j) = \dfrac{\binom{j-1}{1}}{\binom{n}{2}} = \dfrac{2(j-1)}{n(n-1)}}$. Cette formule reste valable lorsque $j = 1$, car elle donne bien $P(Y = 1) = 0$.

1.3. Le raisonnement est analogue à celui que l'on a utilisé dans la question précédente :

- Pour $i \in [\![1, n - 1]\!]$; l'évènement $(X \geq i)$ est réalisé si et seulement le plus petit des deux numéros tirés est supérieur ou égal à i, donc si et seulement si les numéros tirés sont tous deux supérieurs ou égaux à i.

On a $\binom{n-i+1}{2}$ choix simultanés de deux numéros entre i et n, et toujours $\binom{n}{2}$ choix simultanés de deux numéros entre 1 et n, d'où $\boxed{P(X \geq i) = \dfrac{\binom{n-i+1}{2}}{\binom{n}{2}}}$.

On remarque, là encore, que cette formule reste valable lorsque $i = n$: $\dfrac{\binom{1}{2}}{\binom{n}{2}}$ est nul, et il est impossible que le plus petit des deux numéros choisi soit supérieur ou égal à n.

• • On déduit ensuite du résultat précédent que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\begin{aligned} P(X = i) &= P(X \geq i) - P(X \geq i+1) \\ &= \frac{\binom{n-i+1}{2} - \binom{n-i}{2}}{\binom{n}{2}} \\ &= \frac{\binom{n-i}{1} + \binom{n-i}{2} - \binom{n-i}{2}}{\binom{n}{2}}, \end{aligned}$$

et l'on a donc $\boxed{P(X = i) = \dfrac{2(n-i)}{n(n-1)}}$. Cette formule reste valable lorsque $i = n$, car elle donne bien $P(X = n) = 0$.

1.4. • Le plus grand des deux numéros obtenu est strictement supérieur au plus petit des deux… le couple (X, Y) est donc à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{F} = \left\{(i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \ / \ i < j\right\}$.

Notons que choisir un élément de $\mathcal{F}$ revient à choisir deux éléments distincts de $[\![1, n]\!]$ (il n'y a ensuite qu'une seule façon de les ranger dans l'ordre croissant). On en déduit que le cardinal de $\mathcal{F}$ est égal à $\binom{n}{2}$.

Notons de plus que, puisque le tirage est effectué au hasard, tous les couples de jetons ont la même probabilité d'être obtenus. Il en résulte, par symétrie, que pour tout élément (i, j) de $\mathcal{F}$:

$$\boxed{P(X = i, Y = j) = \frac{1}{\operatorname{card}(\mathcal{F})} = \frac{2}{n(n-1)}}.$$

• • On peut alors retrouver les lois de X et de Y, lois marginales du couple (X, Y) :

◦ Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $P(Y = j) = \displaystyle\sum_{i \,/\, (i, j) \in \mathcal{F}} P(X = i, Y = j) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{2}{n(n-1)}$, d'où $\boxed{P(Y=j)=\dfrac{2(j-1)}{n(n-1)}}$.

∘∘ Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(X=i)=\displaystyle\sum_{j\,/\,(i,j)\in\mathcal{F}} P(X=i, Y=j)=\sum_{j=i+1}^{n}\frac{2}{n(n-1)}$,

on a donc bien $\boxed{P(X=i)=\dfrac{2(n-i)}{n(n-1)}}$.

• • • Les variables aléatoires X et Y sont évidemment indépendantes (car certaines) lorsque $n=2$.

Pour $n>2$, $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$, car d'après ce qui précède, on par exemple

$P(X=2, Y=2)=0$, alors que $P(X=2)\cdot P(Y=2)=\dfrac{2(n-2)}{n(n-1)}\dfrac{2}{n(n-1)}\neq 0$.

1.5. a) • Puisque X est à valeurs dans $[\![1, n-1]\!]$, la variable aléatoire $n+1-X$ est à valeurs dans

$[\![n+1-(n-1), n+1-1]\!]=[\![2, n]\!]$.

Pour tout $j \in [\![2, n]\!]$, $P(n+1-X=j)=P(X=n+1-j)$, d'où d'après 1.3. :

$$P(n+1-X=j)=\frac{2(n-(n+1-j))}{n(n-1)}=\frac{2(j-1)}{n(n-1)}=P(Y=j):$$

$\boxed{\text{Les variables aléatoires } n+1-X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi}}$.

On pouvait raisonner de manière différente, et sans même connaître les lois de X et Y : supposons que le jeton numéroté n sur une face porte, sur l'autre face, un numéro 1^*, que le jeton numéroté $n-1$ porte aussi un numéro 2^*, et ainsi de suite : pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, le jeton numéro k porte également le numéro $(n+1-k)^*$. Considérons alors les variables aléatoires X^* et Y^* représentant respectivement le plus petit et le plus grand des deux numéros étoilés obtenus lors du tirage. Il est clair que Y^* suit la même loi que Y ; d'autre part, on a $Y^*=n+1-X$ (le plus grand des numéros étoilés obtenus est égal à j si et seulement le plus petit des numéros non étoilés obtenus est égal à $n+1-j$, donc si et seulement si $n+1-X$ est égal à j). On retrouve ainsi le fait que $\boxed{n+1-X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi}}$.

• • Toutes les variables aléatoires mises en jeu ici suivent des lois finies, et admettent de ce fait une espérance et une variance. Puisque $n+1-X$ et Y suivent la même loi, elles ont même espérance et même variance : $\boxed{E(n+1-X)=E(Y)}$ et $\boxed{V(n+1-X)=V(Y)}$.

b) • La relation $E(n+1-X) = E(Y)$ donne, par linéarité de l'espérance :

$E(n+1) - E(X) = E(Y)$, d'où $\boxed{E(X) = n+1-E(Y)}$.

On sait que pour tous réels a, b, $V(aX+b) = a^2 V(X)$; on peut donc déduire de l'égalité

$V(n+1-X) = V(Y)$ que $\boxed{V(X) = V(Y)}$.

•• Par définition d'une espérance, $E(Y) = \sum_{j=1}^{n} j\,P(Y=j)$, puis d'après 1.2. ,

$E(Y) = \dfrac{2}{n(n-1)} \sum_{j=1}^{n} j(j-1) = \dfrac{2}{n(n-1)} S_2$. On déduit alors de 1.1.c) que

$\boxed{E(Y) = \dfrac{2(n+1)}{3}}$. La relation $E(X) = n+1-E(Y)$ donne ensuite

$\boxed{E(X) = \dfrac{n+1}{3}}$.

1.6. • D'après le théorème de transfert,

$$E\big(Y(Y-2)\big) = \sum_{j=1}^{n} j(j-2)\,P(Y=j)$$
$$= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=1}^{n} j(j-1)(j-2) = \frac{2}{n(n-1)} S_3 ,$$

et l'on en tire d'après 1.1.c. : $\boxed{E\big(Y(Y-2)\big) = \dfrac{(n+1)(n-2)}{2}}$.

•• A nouveau par linéarité de l'espérance, on en déduit que $E\left(Y^2\right) - 2E(Y) = \dfrac{(n+1)(n-2)}{2}$,

puis d'après 1.5.b) : $\boxed{E\left(Y^2\right) = \dfrac{4(n+1)}{3} + \dfrac{(n+1)(n-2)}{2} = \dfrac{(n+1)(3n+2)}{6}}$.

••• Enfin, par définition d'une variance,

$$\boxed{V(Y) = E\left(Y^2\right) - E(Y)^2 = \frac{(n+1)(3n+2)}{6} - \frac{4(n+1)}{9} = \frac{(n+1)(n-2)}{18}}.$$

On sait alors (cf. 1.5.b)) que l'on a également $\boxed{V(X) = \dfrac{(n+1)(n-2)}{18}}$.

1.7. Ça commence à devenir un brin répétitif, mais...

- Le théorème de transfert donne $E\left(X\left(Y-2\right)\right)=\sum_{(i,j)\in\mathcal{F}} i\left(j-2\right)P\left(X=i,Y=j\right)$;

il en résulte dans un premier temps que $E\left(X\left(Y-2\right)\right)=\dfrac{2}{n\left(n-1\right)}\sum_{(i,j)\in\mathcal{F}} i\left(j-2\right)$, et dans un deuxième que l'on a

$$\begin{aligned} E\left(X\left(Y-2\right)\right) &= \frac{2}{n\left(n-1\right)}\sum_{j=2}^{n}\left(\left(j-2\right)\cdot\sum_{i=1}^{j-1} i\right) \\ &= \frac{1}{n\left(n-1\right)}\sum_{j=2}^{n} j\left(j-1\right)\left(j-2\right) \quad \text{d'après 1.1.c)} \\ &= \frac{1}{n\left(n-1\right)}\sum_{j=1}^{n} j\left(j-1\right)\left(j-2\right), \end{aligned}$$

et, en utilisant encore une fois 1.1.c) , on en tire : $\boxed{E\left(X\left(Y-2\right)\right)=\dfrac{\left(n+1\right)\left(n-2\right)}{4}}$.

- • Un nouveau petit coup de linéarité de l'espérance permet de déduire de ce qui précède que

$$\begin{aligned} E\left(XY\right) = E\left(X\left(Y-2\right)\right)+2E\left(X\right) &= \frac{\left(n+1\right)\left(n-2\right)}{4}+\frac{2\left(n+1\right)}{3} \\ &= \boxed{\frac{\left(n+1\right)\left(3n+1\right)}{12}}. \end{aligned}$$

1.8. • Par définition d'une covariance, puis d'après les questions 1.7. et 1.5.b) :

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}\left(X,Y\right) = E\left(XY\right)-E\left(X\right)E\left(Y\right) &= \frac{\left(n+1\right)\left(n-2\right)}{4}-\frac{2\left(n+1\right)^2}{9} \\ &= \boxed{\frac{\left(n+1\right)\left(n-2\right)}{36}}. \end{aligned}$$

- • Le coefficient de corrélation $\rho\left(X,Y\right)$ de X et Y existe si et seulement si leur variance commune $\dfrac{\left(n+1\right)\left(n-2\right)}{18}$ est non nulle, donc si et seulement si $\boxed{n\neq 2}$.

Lorsque cette condition est remplie, on a $\rho\left(X,Y\right)=\dfrac{\operatorname{cov}\left(X,Y\right)}{\sqrt{V\left(X\right)V\left(Y\right)}}$, d'où :

$$\boxed{\rho\left(X,Y\right)=\frac{\dfrac{\left(n+1\right)\left(n-2\right)}{36}}{\sqrt{\left(\dfrac{\left(n+1\right)\left(n-2\right)}{18}\right)^2}}=\frac{1}{2}}.$$

On remarque, bien sûr, que la valeur de $\rho\left(X,Y\right)$ ne dépend pas de n .

PROBLÈME 2

2.1. a) La fonction $g : x \mapsto \sqrt{x} - x = \sqrt{x}\left(1 - \sqrt{x}\right)$ est $\boxed{\text{positive sur } [0,1]}$, $\boxed{\text{négative sur } [1,+\infty[}$.

En outre, g s'annule en 0 et en 1, et uniquement en ces points.

b) Supposons donc que $t \geq 1$.

- Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n) :\ 1 \leq x_{n+1} \leq x_n$ est vraie.

Initialisation

On a $x_0 = t \geq 1$, et l'on en déduit que $x_1 = \sqrt{x_0} \geq 1$. De plus, puisque $x_0 \in [1,+\infty[$, $x_1 - x_0 = \sqrt{x_0} - x_0 = g(x_0)$ est négatif, on a donc bien $\mathcal{P}(0) :\ 1 \leq x_1 \leq x_0$.

Hérédité

C'est une copie conforme de l'initialisation :

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$. Alors $x_{n+1} \geq 1$, donc $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} \geq 1$, et, comme $x_{n+1} \in [1,+\infty[$, on a $x_{n+2} - x_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}} - x_{n+1} = g(x_{n+1}) \leq 0$, d'où $\mathcal{P}(n+1) :\ 1 \leq x_{n+2} \leq x_{n+1}$.

Conclusion

D'après le principe du raisonnement par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qu'il fallait démontrer.

- • Il en résulte que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, minorée par 1, et le théorème de la limite monotone assure qu'alors $\boxed{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente}}$. Notons ℓ sa limite ; on a également $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{n+1} = \ell$, et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en ℓ ; ceci autorise à écrire, en passant à la limite dans l'égalité $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$, que $\ell = \sqrt{\ell}$. On en déduit que $\ell = 0$ ou $\ell = 1$; on écarte le cas $\ell = 0$, impossible puisque $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 1, et l'on conclut que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1}$.

c) Oui, ben on ne va pas non plus tout recommencer…

On montre de la même façon qu'en b) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \geq x_{n+1} \geq x_n$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante, majorée, par conséquent elle converge. Comme en b), sa limite ne peut être égale qu'à 0 ou à 1 ; $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$ est exclu puisque la suite est minorée par son premier terme $x_0 = t > 0$, on a donc là encore $\boxed{\lim_{n \to +\infty} x_n = 1}$.

2.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = 2^{n+1}\left(x_{n+1} - 1\right) - 2^n\left(x_n - 1\right) = 2^{n+1}\left(x_{n+1} - 1\right) - 2^n\left(x_{n+1}^2 - 1\right),$$

d'où $\boxed{u_{n+1} - u_n = 2^n\left(-x_{n+1}^2 + 2x_{n+1} - 1\right) = -2^n\left(x_{n+1} - 1\right)^2}$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$: $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$.

2.3. Alors, *de même* :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n = 2^{n+1}\frac{x_{n+1} - 1}{x_{n+1}} - 2^n\frac{x_n - 1}{x_n}$$

$$= 2^{n+1}\frac{x_{n+1} - 1}{x_{n+1}} - 2^n\frac{x_{n+1}^2 - 1}{x_{n+1}^2},$$

donc $v_{n+1} - v_n = \dfrac{2^n}{x_{n+1}^2}\left(2x_{n+1}\left(x_{n+1} - 1\right) - \left(x_{n+1}^2 - 1\right)\right) = \dfrac{2^n}{x_{n+1}^2}\left(x_{n+1} - 1\right)^2 \geq 0$,

et l'on en conclut que $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}}$.

2.4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n = 2^n\left(x_n - 1\right) - 2^n\dfrac{x_n - 1}{x_n} = 2^n\dfrac{\left(x_n - 1\right)^2}{x_n}$,

donc $\boxed{u_n - v_n \geq 0}$.

2.5. D'après ce qui précède, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq v_n$, et la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq v_0$: la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par v_0, et on sait qu'elle est décroissante, donc, d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}}$.

De la même façon, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, majorée par u_0, et de ce fait $\boxed{(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente}}$.

2.6. Notons L la limite de $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. D'après 2.1., la suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. L'égalité

$\forall\, n\in\mathbb{N}\,,\ v_n=\dfrac{u_n}{x_n}$ permet alors de retrouver la convergence de $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, et assure que

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$: $\boxed{\text{les suites } \left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } \left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ admettent la même limite}}$.

2.7. $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers L en croissant, $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers L en décroissant, on a donc

pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\boxed{v_n\le L\le u_n}$.

En particulier, $v_0\le L\le u_0$, soit $1-\dfrac{1}{x_0}\le L\le x_0-1$, ou encore : $\boxed{1-\dfrac{1}{t}\le L\le t-1}$.

2.8. Lorsque $t=1$, l'inégalité ci-dessus donne immédiatement $\boxed{f(1)=0}$.

2.9. • L'encadrement $1-\dfrac{1}{t}\le L\le t-1$ prouvé en 2.7. s'écrit maintenant $1-\dfrac{1}{t}\le f(t)\le t-1$.

En divisant par $t-1$ (*attention au signe…*), on déduit de celui – ci que

$$\forall\, t\in\left]0,1\right[\,,\ 1\le f(t)\le\frac{1-\frac{1}{t}}{t-1}=\frac{1}{t},\text{ et : }\forall\, t\in\left]1,+\infty\right[\,,\ \frac{1}{t}\le f(t)\le 1.$$

On a alors immédiatement par encadrement $\boxed{\lim\limits_{\substack{t\to1\\ t\ne1}}\dfrac{f(t)}{t-1}=1}$.

• • On peut réécrire ce résultat sous la forme : $\lim\limits_{\substack{t\to1\\ t\ne1}}\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}=1$. Par définition d'un nombre

dérivé, ceci signifie que $\boxed{f\text{ est dérivable en }1}$, et que $\boxed{f\,'(1)=1}$.

2.10. Soit $\left(t_1,t_2\right)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

a) On a $\begin{cases} x_0\left(t_1\cdot t_2\right)=t_1\cdot t_2\\ x_0\left(t_1\right)\cdot x_0\left(t_2\right)=t_1\cdot t_2\end{cases}$, et pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{cases} x_{n+1}\left(t_1\cdot t_2\right)=\sqrt{x_n\left(t_1\cdot t_2\right)}\\ x_{n+1}\left(t_1\right)\cdot x_{n+1}\left(t_2\right)=\sqrt{x_n\left(t_1\right)}\cdot\sqrt{x_n\left(t_2\right)}=\sqrt{x_n\left(t_1\right)\cdot x_n\left(t_2\right)}\end{cases}.$$

Les suites $\left(x_n\left(t_1 \cdot t_2\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(x_n\left(t_1\right) \cdot x_n\left(t_2\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ont même premier terme, et vérifient la même relation de récurrence, une récurrence simple montre qu'alors elles sont égales :

$$\boxed{\forall\, t_1 \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, t_2 \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n\left(t_1 \cdot t_2\right) = x_n\left(t_1\right) \cdot x_n\left(t_2\right)}.$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
u_n\left(t_1 \cdot t_2\right) - u_n\left(t_1\right) - u_n\left(t_2\right) &= 2^n\left(x_n\left(t_1 \cdot t_2\right) - 1\right) - 2^n\left(x_n\left(t_1\right) - 1\right) - 2^n\left(x_n\left(t_2\right) - 1\right) \\
&= 2^n\left(x_n\left(t_1 \cdot t_2\right) - x_n\left(t_1\right) - x_n\left(t_2\right) + 1\right) \\
&= 2^n\left(x_n\left(t_1\right) x_n\left(t_2\right) - x_n\left(t_1\right) - x_n\left(t_2\right) + 1\right) \\
&= 2^n\left(x_n\left(t_1\right) - 1\right)\left(x_n\left(t_2\right) - 1\right) \\
&= 2^{-n} u_n\left(t_1\right) u_n\left(t_2\right).
\end{aligned}$$

Les suites $\left(u_n\left(t_1\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(u_n\left(t_2\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornées (car convergentes), on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty}\left(u_n\left(t_1 \cdot t_2\right) - u_n\left(t_1\right) - u_n\left(t_2\right)\right) = 0}.$$

c) On a par définition de f, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n\left(t_1 \cdot t_2\right) = f\left(t_1 \cdot t_2\right)$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n\left(t_2\right) = f\left(t_2\right)$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n\left(t_1\right) = f\left(t_1\right)$, le résultat précédent donne donc immédiatement :

$$\boxed{f\left(t_1 \cdot t_2\right) = f\left(t_1\right) + f\left(t_2\right)}.$$

2.11. a) Avec les conditions de l'énoncé, les réels $t_1 = t$ et $t_2 = 1 + \dfrac{h}{t}$ sont strictement positifs, et l'on peut donc leur appliquer le résultat de la question précédente.

On obtient $f\left(1 + \dfrac{h}{t}\right) + f(t) = f\left(t\left(1 + \dfrac{h}{t}\right)\right) = f(t + h)$, d'où :

$$\boxed{f(t + h) - f(t) = f\left(1 + \frac{h}{t}\right)}.$$

b) La fonction f étant dérivable en 1, elle y admet un développement limité à l'ordre 1, donné par $f(x) \underset{1}{=} f(1) + (x - 1) f'(1) + \circ(x - 1) \underset{1}{=} (x - 1) + \circ(x - 1)$.

On a donc $f(1 + y) \underset{0}{=} y + \circ(y)$, et ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ fixé :

$$f\left(1 + \frac{h}{t}\right) \underset{h \to 0}{=} \frac{h}{t} + \circ(h).$$

On déduit alors de l'égalité $f(t+h)-f(t)=f\left(1+\frac{h}{t}\right)$ que

$f(t+h)-f(t) \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{t}h+\circ(h)$, ou encore : $\frac{f(t+h)-f(t)}{h} \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{t}+\circ(1)$.

Cela revient à dire que $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=\frac{1}{t}$: $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est donc dérivable en tout point } t \text{ de } \mathbb{R}_+^*, \text{ et pour tout } t\in\mathbb{R}_+^*,\ f'(t)=\frac{1}{t}}$.

c) D'après la question précédente, f est une primitive de $t\mapsto\frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$; il existe donc une constante $c\in\mathbb{R}$ telle que pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $f(t)=\ln t+c$.

On sait de plus que $f(1)=0$; on en conclut que $c=0$, et que $\boxed{f \text{ est la fonction } \ln}$.

2.12. Une récurrence facile permet de prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\boxed{x_n(t)=\left(x_0(t)\right)^{\frac{1}{2^n}}=t^{\frac{1}{2^n}}}$.

Il en résulte que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n(t)=2^n\left(t^{\frac{1}{2^n}}-1\right)$, soit : $u_n(t)=2^n\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln t}{2^n}}-1\right)$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln t}{2^n}=0$, il est correct d'utiliser le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de la fonction exponentielle, et d'écrire que $u_n(t)\underset{n\to+\infty}{=}2^n\left(1+\frac{\ln t}{2^n}-1+\circ\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)$.

Mais alors, $u_n(t)\underset{n\to+\infty}{=}\ln t+\circ(1)$: on retrouve ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n(t)=\ln t$, soit :

$\boxed{f(t)=\ln t}$, pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$.

PROBLÈME 3

3.1. Soient a et b deux réels. On a

$$\forall\ x \in I\ ,\ \frac{3x+1-\lambda}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} \Leftrightarrow \forall\ x \in I\ ,\ \frac{3x+1-\lambda}{1-x^2} = \frac{a(1+x)+b(1-x)}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow \forall\ x \in I\ ,\ 3x+1-\lambda = (a-b)x+(a+b) \qquad (\mathbf{1})$$

En identifiant les coefficients des fonctions polynomiales $x \mapsto 3x+1-\lambda$ et

$x \mapsto (a-b)x+(a+b)$, il vient $(\mathbf{1}) \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=3 \\ a+b=1-\lambda \end{cases}$, puis par demie – somme et demie – différence : $(\mathbf{1}) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2-\dfrac{\lambda}{2} \\ b = -1-\dfrac{\lambda}{2} \end{cases}$. Ainsi, $\boxed{(a,b) = \left(2-\frac{\lambda}{2}, -1-\frac{\lambda}{2}\right) \text{ est l'unique couple de réels tel que pour tout } x \in I\ ,\ \frac{3x+1-\lambda}{1-x^2} = \frac{a}{1-x}+\frac{b}{1+x}}$.

3.2. $(\boldsymbol{E}_\lambda)$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre, homogène, à coefficients continus, le coefficient $y\,'$ ne s'annulant pas sur l'intervalle I. On sait alors que, si l'on note $x \mapsto A(x)$ une primitive sur I de la fonction $x \mapsto \dfrac{3x+1-\lambda}{1-x^2}$, les solutions de $(\boldsymbol{E}_\lambda)$ sur I sont les fonctions

$$f_\mu : \begin{pmatrix} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mu \exp(-A(x)) \end{pmatrix},\ \mu \text{ constante réelle.}$$

D'après le résultat de la question précédente : $\forall\ x \in I\ ,\ \dfrac{3x+1-\lambda}{1-x^2} = \dfrac{2-\frac{\lambda}{2}}{1-x} - \dfrac{1+\frac{\lambda}{2}}{1+x}$; une primitive

sur I de $x \mapsto \dfrac{3x+1-\lambda}{1-x^2}$ est donc la fonction $x \mapsto -\left(2-\dfrac{\lambda}{2}\right)\ln(1-x) - \left(1+\dfrac{\lambda}{2}\right)\ln(1+x)$.

Par suite, les solutions de $(\boldsymbol{E}_\lambda)$ sur I sont les fonctions

$$f_\mu : \begin{pmatrix} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mu \exp\left(\left(2-\dfrac{\lambda}{2}\right)\ln(1-x) + \left(1+\dfrac{\lambda}{2}\right)\ln(1+x)\right) \end{pmatrix},$$

c'est – à – dire les fonctions $\boxed{f_\mu : \begin{pmatrix} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mu(1-x)^{2-\frac{\lambda}{2}} \cdot (1+x)^{1+\frac{\lambda}{2}} \end{pmatrix},\ \mu \text{ constante réelle}}$.

3.3. Puisque l'on admet que $x \mapsto (1-x)^{2-\frac{\lambda}{2}} \cdot (1+x)^{1+\frac{\lambda}{2}}$ est un polynôme si et seulement si $2 - \dfrac{\lambda}{2}$ et $1 + \dfrac{\lambda}{2}$ sont des entiers naturels, on sait que les solutions de $\left(\boldsymbol{E}_\lambda \right)$ sont toutes des

polynômes si et seulement si $\begin{cases} 2 - \dfrac{\lambda}{2} \geq 0 \\ 1 + \dfrac{\lambda}{2} \geq 0 \\ \dfrac{\lambda}{2} \text{ est un entier relatif} \end{cases}$, donc si et seulement si λ est un entier relatif pair

appartenant à $[-2, 4]$. Par conséquent, $\boxed{\text{les valeurs de } \lambda \text{ pour lesquelles les solutions de } \left(\boldsymbol{E}_\lambda \right) \text{ sont}}$ $\boxed{\text{toutes des polynômes sont : } -2\,;\,0\,;\,2 \text{ et } 4}$ (et l'on peut préciser que, pour toute autre valeur de λ, la seule solution polynomiale de $\left(\boldsymbol{E}_\lambda \right)$ est la fonction nulle).

Puisqu'on nous le demande gentiment, précisons l'ensemble S_λ des solutions de $\left(\boldsymbol{E}_\lambda \right)$, pour chacune des valeurs trouvées : on a

$$\boxed{\begin{array}{l} S_{-2} = \left\{ f_\mu : \begin{pmatrix} I \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto \mu\left(1 - x\right)^3 \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R} \right\} \\ S_0 = \left\{ f_\mu : \begin{pmatrix} I \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto \mu\left(1 - x\right)^2 \cdot \left(1 + x\right) \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R} \right\} \\ S_2 = \left\{ f_\mu : \begin{pmatrix} I \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto \mu\left(1 - x\right) \cdot \left(1 + x\right)^2 \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R} \right\} \\ S_4 = \left\{ f_\mu : \begin{pmatrix} I \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto \mu\left(1 + x\right)^3 \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R} \right\} \end{array}}.$$

3.4. On pourrait procéder de manière plus fine, mais, puisque les polynômes mis en jeu ici sont de petit degré, pourquoi se creuser la tête : écrivons explicitement ces polynômes, et vérifions !

Pour tout $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$, on a

$$\begin{aligned} RP' + SP &= \left(1 - X^2\right)\left(b + 2cX + 3dX^2\right) + \left(1 + 3X\right)\left(a + bX + cX^2 + dX^3\right) \\ &= \left(a + b\right) + \left(3a + b + 2c\right)X + \left(2b + c + 3d\right)X^2 + \left(c + d\right)X^3, \end{aligned}$$

c'est gagné : $\boxed{\text{pour tout } P \in \mathbb{R}_3[X],\ RP' + SP \in \mathbb{R}_3[X]}$.

3.5. • On a montré dans la question précédente que pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $f(P) = RP' + SP$ est un élément de $\mathbb{R}_3[X]$.

•• Soient P, Q deux éléments de $\mathbb{R}_3[X]$, et μ un réel ; posons $T = \mu P + Q$. Alors,

$$
\begin{aligned}
f(T) &= RT' + ST \\
&= R(\mu P + Q)' + S(\mu P + Q) \\
&= R(\mu P' + Q') + S(\mu P + Q) \quad \text{par linéarité de l'opérateur dérivation} \\
&= \mu(RP' + SP) + (RQ' + SQ) \\
&= \mu f(P) + f(Q),
\end{aligned}
$$

donc $f(\mu P + Q) = \mu f(P) + f(Q)$, et f est linéaire. Ceci achève de prouver que

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_3[X]}.$$

3.6. On a montré au détour de la question 3.4. que pour tout $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$,

$$f(P) = (a+b) + (3a + b + 2c)X + (2b + c + 3d)X^2 + (c+d)X^3.$$

En appliquant cette relation aux polynômes composant la famille $\mathcal{B}$, on obtient :

$$f(1) = 1 + 3X$$

$$f(X) = 1 + X + 2X^2$$

$$f(X^2) = 2X + X^2 + X^3$$

$$f(X^3) = 3X^2 + X^3.$$

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ est donc :

$$\boxed{A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & f(X^3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array} .}$$

3.7. Avec les notations de l'énoncé, on a, par définition des éléments propres d'un endomorphisme, $f(Q) = \lambda Q$, soit $RQ' + SQ = \lambda Q$, ou encore : $(1 - X^2)Q' + (1 + 3X - \lambda)Q = 0$.

Q est donc une solution non nulle (*puisque c'est un vecteur propre…*), et polynomiale, de l'équation différentielle $(\boldsymbol{E}_\lambda)$. On en déduit, en utilisant le résultat et les notations de la question 3.3. , que l'on a $\lambda \in \{-2 ; 0 ; 2 ; 4\}$, et $Q \in S_\lambda \setminus \{0\}$.

Réciproquement, si $\lambda \in \{-2 ; 0 ; 2 ; 4\}$, alors tout élément Q de S_λ est un polynôme vérifiant $(1 - X^2)Q' + (1 + 3X - \lambda)Q = 0$, donc $f(Q) = \lambda Q$, et ainsi λ est valeur propre de f, et tout élément non nul de S_λ est un vecteur propre associé.

On en conclut que $\boxed{\text{les valeurs propres de } f \text{ sont } -2\,;\,0\,;\,2\,;\,4}$, et que les sous – espaces propres associés sont :

$$\boxed{\begin{array}{lll} S_{-2} = \left\{ \mu\,(1-X)^3,\ \mu \in \mathbb{R} \right\} & & = \operatorname{Vect}\left((X-1)^3 \right) \\ S_0 = \left\{ \mu\,(1-X)^2\cdot(1+X),\ \mu \in \mathbb{R} \right\} & & = \operatorname{Vect}\left((1-X)^2\cdot(1+X) \right) \\ S_2 = \left\{ \mu\,(1-X)\cdot(1+X)^2,\ \mu \in \mathbb{R} \right\} & & = \operatorname{Vect}\left((X-1)\cdot(1+X)^2 \right) \\ S_4 = \left\{ \mu\,(1+X)^3,\ \mu \in \mathbb{R} \right\} & & = \operatorname{Vect}\left((1+X)^3 \right) \end{array}}\ .$$

3.8. La matrice A appartient à $\mathcal{M}_4(\mathrm{R})$, et admet quatre valeurs propres distinctes d'après la question précédente, $\boxed{A \text{ est donc diagonalisable}}$.

La famille $\mathcal{B}' = \left((X-1)^3, (1-X)^2\cdot(1+X), (X-1)\cdot(1+X)^2, (1+X)^3 \right)$ est composée de vecteurs propres de f associés à des valeurs propres deux à deux distinctes (*et rangées, comme demandé, dans l'ordre croissant*), on sait alors que $\mathcal{B}'$ est une famille libre. C'est de plus une famille de quatre vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$, et $\dim\left(\mathbb{R}_3[X]\right) = 4$, donc $\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}_3[X]}$ (*et les polynômes formant cette base sont bien de coefficient dominant égal à* 1).

La matrice de passage V de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ est la matrice des coordonnées des vecteurs composant $\mathcal{B}'$ dans la base canonique. On a

$$\left\{ \begin{array}{ll} (X-1)^3 & = -1 + 3X - 3X^2 + X^3 \\ (1-X)^2\cdot(1+X) & = 1 - X - X^2 + X^3 \\ (X-1)\cdot(1+X)^2 & = -1 - X + X^2 + X^3 \\ (X+1)^3 & = 1 + 3X - 3X^2 + X^3 \end{array} \right. \text{, donc}$$

$$\boxed{V = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (X-1)^3 & (1-X)^2\cdot(1+X) & (X-1)\cdot(1+X)^2 & (X+1)^3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array}}\ .$$

Cette matrice est inversible, puisque c'est une matrice de passage.

3.9. Les polynômes composant la base $\mathcal{B}'$ sont des vecteurs propres de f, respectivement et dans cet ordre, pour les valeurs propres -2 ; 0 ; 2 ; 4, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est donc la matrice diagonale

$\boxed{D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$, et la formule de changement de base donne : $\boxed{D = V^{-1} A V}$.

3.10. Le calcul donne $\boxed{V^2 = 8 I_4}$. On retrouve ainsi l'inversibilité de V, et l'on a $\boxed{V^{-1} = \frac{1}{8} V}$.

Notons que la formule obtenue dans la question précédente devient alors $D = \frac{1}{8} V A V$, ou encore, si on la retourne : $A = 8 \cdot V D V$. Ceci permettrait, entre autres applications classiques, de calculer facilement les puissances successives de A … si ce sujet n'était pas suffisamment long sans cela.

Corrigé proposé par Marc Halberstadt BCPST2 Le Raincy