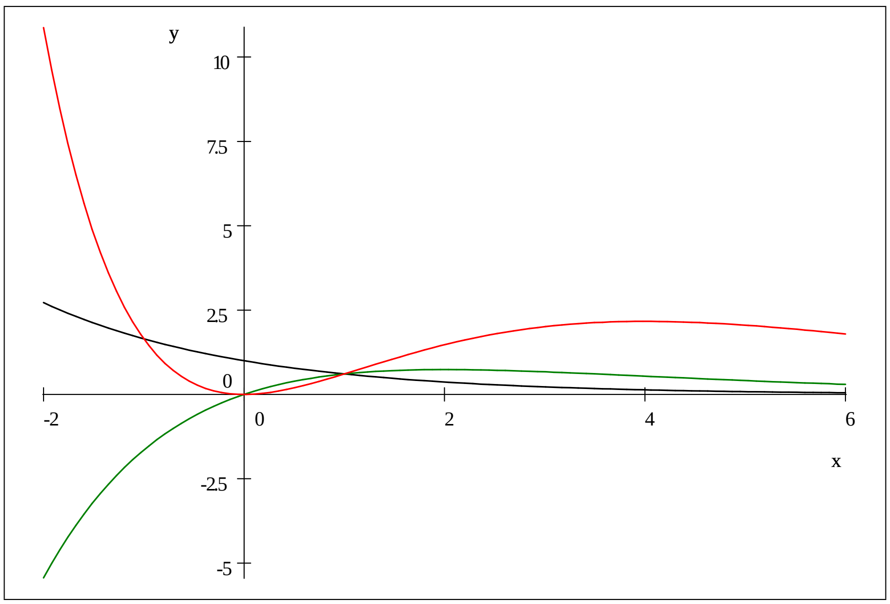
Corrigé Epreuve G2E BCPST 2009

Problème 1

1. a) $\varphi_0(x) = e^{-x/2}$
   $\varphi_1(x) = xe^{-x/2}, \quad \varphi_1'(x) = e^{-x/2}\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)$
   $\varphi_2(x) = x^2e^{-x/2}, \quad \varphi_2'(x) = xe^{-x/2}\left(2 - \dfrac{x}{2}\right)$
   $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi_n(x) = +\infty$ si n est pair , $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi_n(x) = -\infty$ si n est impair
   Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_n(x) = 0$

   b) $\varphi_0(1) = \varphi_1(1) = \varphi_2(1)$
   $\forall x \in]0,1[, \quad x^2 < x < 1$ d'où $\varphi_2(x) < \varphi_1(x) < \varphi_0(x)$
   $\forall x > 1, \quad \varphi_2(x) > \varphi_1(x) > \varphi_0(x)$
   $\forall x \in]-1,0[, \quad \varphi_1(x) < 0 < \varphi_2(x) < \varphi_0(x)$
   $\forall x < -1, \quad \varphi_1(x) < 0 < \varphi_0(x) < \varphi_2(x)$

   c) D'où les graphes avec les positions relatives des courbes
   $\varphi_0(x) = e^{-x/2} \quad \varphi_1(x) = xe^{-x/2} \quad \varphi_2(x) = x^2e^{-x/2}$



2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_2'(x) = x^{n-1}e^{-x/2}\left(n - \dfrac{x}{2}\right)$
   φ_n est croissante sur $[0, 2n]$, décroissante sur $[2n, +\infty[$;Le maximum est atteint en $2n$
   $M_n = \varphi_n(2n)$

$$\boxed{M_n = e^{-n}(2n)^n}$$

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} = e^{-1}2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sim 1$ d'où $\lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$$\boxed{\lim\frac{M_{n+1}}{M_n}=2}$$

3. a) A l'aide d'une intégration par parties : $\begin{cases} u(t)=t^{n+1} & u'(t)=(n+1)t^n \\ v'(t)=e^{-t/2} & v(t)=-2e^{-t/2}\end{cases}$ u et v de classe C sur R

$\Psi_{n+1}(x)=\dfrac{1}{2^{n+2}(n+1)!}\left(\left[-2e^{-t/2}t^{n+1}\right]_0^x+2(n+1)\int_0^x t^ne^{-t/2}dt\right)=\Psi_n(x)-\dfrac{e^{-x/2}x^{n+1}}{(n+1)!2^{n+1}}$

$$\boxed{\Psi_{n+1}(x)=\Psi_n(x)-\frac{e^{-x/2}x^{n+1}}{(n+1)!2^{n+1}}}$$

b) $\Psi_0(x)=\dfrac{1}{2}\int_0^x e^{-t/2}dt=1-e^{-x/2}$

$\Psi_1(x)=\Psi_0(x)-\dfrac{x}{2}e^{-x/2}=1-e^{-x/2}-\dfrac{x}{2}e^{-x/2}$

$\Psi_2(x)=\Psi_1(x)-\dfrac{x^2}{8}e^{-x/2}=1-e^{-x/2}-\dfrac{x}{2}e^{-x/2}-\dfrac{x^2}{8}e^{-x/2}$

c) Par télescopage, $\forall n\geq 1,\quad \Psi_n(x)=\Psi_0(x)-e^{-x/2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!2^{k+1}}\right)=1-e^{-x/2}\left(\sum_{k=0}^{n}\dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{k!}\right)$

Cette dernière expréssion est encore valable pour $n=0$.

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x/2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^k=0$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\Psi_n(x)=1}$$

4. a) •F_n est définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$, car $\Psi_n(0)=0$

•F_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, $\quad\forall x>0,\quad F_n'(x)=\dfrac{1}{2^{n+1}n!}\varphi_n(x)>0,\quad \forall x<0,\quad F_n'(x)=0$

D'où F_n est croissante sur $\mathbb{R}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}F_n(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}F_n(x)=0$

D'où F_n est une fonction de répartition ; soit X_n un variable aléatoire

b) •F_n est continue sur $\mathbb{R}$

•F_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0, d'où X_n admet une densité f_n obtenue en dérivant F_n aux points où F_n est dérivable :

$$\boxed{\begin{array}{ll}\forall x\geq 0, & f_n(x)=\dfrac{1}{2^{n+1}n!}\varphi_n(x)\\ \forall x<0, & f_n(x)=0\end{array}}$$

c) Notons $g_n(x)=xf_n(x)$

g_n est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$

$e^{x/4}xf_n(x)=\dfrac{1}{2^{n+1}n!}x^{n+1}e^{-x/4};\quad \lim\limits_{x\to+\infty}e^{x/4}xf_n(x)=0$ par croissances comparées.

Il existe donc un réel $A>0$, tel que $\forall x\geq A,\quad e^{x/4}xf_n(x)\leq 1$ d'où $g_n(x)\leq e^{-x/4}$

$\int_0^{+\infty}e^{-x/4}dx$ est convergente

Par le thm de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\int_0^{+\infty}xf_n(x)dx$ est convergente, d'où X_n admet une espérance

On peut directement montrer l'existence et déterminer la valeur de l'espérance.

En effet, $\forall x \geq 0, \quad x f_n(x) = \dfrac{1}{2^{n+1} n!} x^{n+1} e^{-x/2} = 2(n+1) f_{n+1}(x)$

f_{n+1} étant une densité, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)dx = 1$

D'où $\int_0^{+\infty} x f_n(x)dx$ converge et vaut $2(n+1)$ D'où $E(X_n) = 2(n+1)$

De même $\forall x \geq 0, \quad x^2 f_n(x) = \dfrac{1}{2^{n+1} n!} x^{n+2} e^{-x/2} = 4(n+2)(n+1) f_{n+2}(x)$

X_n admet un moment d'ordre 2 et $E(X_n^2) = 4(n+1)(n+2)$

X_n admet une varaince et $V(X_n) = E(X_n^2) - (E(X_n))^2 = 4(n+1)$

$$\boxed{E(X_n) = 2(n+1), \quad V(X_n) = 4(n+1)}$$

5. Il faut lire : pour tout entier naturel (à supprimer *non nul*), on a $P(T > n) = F_n(\alpha)$

   $\forall n \in N*, \quad P(T = n) = P(T > n-1) - P(T > n) = F_{n-1}(\alpha) - F_n(\alpha) = \dfrac{e^{-\alpha/2}}{n!} \left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^n$ d'après le 3.a)

   $P(T = 0) = 1 - P(T > 0) = 1 - F_0(\alpha) = \dfrac{e^{-\alpha/2}}{0!} \left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^n$

$$\boxed{T \text{ suit la loi de Poisson } \mathcal{P}(\frac{\alpha}{2}) \text{ , } E(T) = V(T) = \frac{\alpha}{2}}$$

Problème 2

Partie 1

1. $JK = KJ = 0_4$ (matrice nulle) , d'où

$$\boxed{fog = gof = 0}$$

2. Soit v vecteur propre de f associé à la valeur propre λ : $\quad v \neq 0$ et $f(v) = \lambda v$

   $g(f(v)) = g(\lambda v) = \lambda g(v)$

   D'autre part $g(f(v)) = gof(v) = fog(v) = f(g(v))$

   $f(g(v)) = \lambda g(v)$,

$$\boxed{g(v) = 0 \text{ ou } g(v) \text{ est vecteur propre de f associé à la valeur propre } \lambda}$$

3. $K \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   v_1 étant non nul,

$$\boxed{\begin{array}{l} v_1 \text{ est vecteur propre de } f \text{ associé à la valeur propre } 4 \\ v_1 \text{ est vecteur propre de } g \text{ associé à la valeur propre } 0 \end{array}}$$

4. $u = (x, y, z, t) \in \ker f \cap \ker g$ si et seulement $JX = KX = 0$

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - z = 0 \\ y - t = 0 \end{cases} \iff X = 0$$

$$\boxed{\ker f \cap \ker g = \{0\}}$$

5. $rg(v_1,v_2,v_3,v_4)=rg\begin{pmatrix}1&1&\boxed{1}&0\\1&-1&0&1\\1&1&-1&0\\1&-1&0&-1\end{pmatrix}\ L3\leftarrow L3+L1 \quad =rg\begin{pmatrix}1&1&\boxed{1}&0\\1&-1&0&\boxed{1}\\2&2&0&0\\1&-1&0&-1\end{pmatrix}\ L4\leftarrow L4+L2$

$rg(v_1,v_2,v_3,v_4)=rg\begin{pmatrix}1&1&\boxed{1}&0\\1&-1&0&\boxed{1}\\\boxed{2}&2&0&0\\2&-2&0&0\end{pmatrix}\ L4\leftarrow L4-L3 \quad =rg\begin{pmatrix}1&1&\boxed{1}&0\\1&-1&0&\boxed{1}\\\boxed{2}&2&0&0\\0&\boxed{-4}&0&0\end{pmatrix}=4$

le rang de la famille est égal au cardinal de la famille et à la dimension de $\mathbb{R}^4$, cette famille est donc une base de $\mathbb{R}^4$

P matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$:

$$\boxed{P=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&-1&0&1\\1&1&-1&0\\1&-1&0&-1\end{pmatrix}}$$

Vérifions que ce sont des vecteurs propres de f et g:

$J\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\quad J\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad J\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad J\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$K\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad K\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad K\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\quad J\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$

6. $(1,0,1,0)=\frac{1}{2}(v_1+v_2),\quad (0,1,0,1)=\frac{1}{2}(v_1-v_2),\quad (1,0,-1,0)=v_3,\quad (0,1,0,-1)=v_4$

$(1,0,0,0)=\frac{1}{4}(v_1+v_2+2v_3)$

$(0,0,1,0)=\frac{1}{4}(v_1+v_2-2v_3)$

$(0,1,0,0)=\frac{1}{4}(v_1-v_2+2v_4)$

$(0,0,0,1)=\frac{1}{4}(v_1-v_2-2v_4)$

P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ d'où :

$$\boxed{P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\2&0&-2&0\\0&2&0&-2\end{pmatrix}}$$

7. $J'=Mat(f,B')=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad K'=Mat(f,B')=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix},$

Par le thm de changement de bases :

$$\boxed{J=PJ'P^{-1},\quad K=PK'P^{-1}}$$

Partie 2

1. $M(a,b)=aJ+bK$

2. $J2 = 4J, \quad K2 = 2K, \quad JK = KJ = 0$
$M(a,b)M(c,d) = (aJ + bK)(cJ + dK) = 4acJ + 2bdK = M(4ac, 2bd)$

$$\boxed{\text{Le produit de 2 matrices de } E \text{ est un matrice de } E}$$

3. Notons V_i le vecteur colonne des composantes du vecteur v_i
$M(a,b)V_1{=}aJV_1 + bKV_1 = 4aV_1$; V_1 est vecteur propre de $M(a,b)$ associé à la valeur propre $4a$
$M(a,b)V_2{=}aJV_2 + bKV_2 = 0$; V_2 est vecteur propre de $M(a,b)$ associé à la valeur propre 0
$M(a,b)V_3{=}aJV_3 + bKV_3 = 2bV_3$; V_3 est vecteur propre de $M(a,b)$ associé à la valeur propre $2b$
$M(a,b)V_4{=}aJV_4 + bKV_4 = 2bV_4$; $V4$ est vecteur propre de $M(a,b)$ associé à la valeur propre $2b$

$$\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de vecteurs propres de } M(a,b)}$$

4. $M(a,b) = PD(a,b)P^{-1}$ avec $D(a,b) = \begin{pmatrix} 4a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2b \end{pmatrix}$

5. Par récurrence à l'aide de l'expression du 2.
Pour $n \geq 1, Hn =$ " $(M(a,b))^n = M\left(4^{n-1}a^n, 2^{n-1}b^n\right)$ "
Initialisation : $M(a,b) = M\left(4^0 a^1, 2^0 b^1\right)$ H1 est vrai
Hérédité : Soit $n \geq 1$ fixé tel que soit vrai
$(M(a,b))^{n+1} = (M(a,b))^n M(a,b) = M\left(4^n a^{n+1}, 2^n b^{n+1}\right)$ d'après l'expression du produit dans 2.D'où Hn+1 est vrai
Par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \geq 1, (M(a,b))^n = M\left(4^{n-1}a^n, 2^{n-1}b^n\right)}$$

Partie 3

1. Comme le pion est sur une case blanche au départ, par une récurrence immédiate, après un nombre pair (respectivement impair) de déplacements, le pion se trouve sur une case blanche (respectivement noire)

2. La famille $(N_{k,n})_{k=1,2,3,4}$ constitue un système complet d'événements; Par la formule des probabilités totales :
Pour $j \in \{1,..5\}, \quad P(B_{j,n}) = \sum_{k=1}^{4} P(N_{k,n}) P(B_{j,n}/N_{k,n})$
S'il est sur N_1 ou N_2 ou N_3 ou N_4, il va en B_1 avec la probabilité 1/3 : $p_{1,n} = \dfrac{1}{3}(q_{1,n} + q_{2,n} + q_{3,n} + q_{4,n})$
S'il est sur N_1 ou N_4, il va en B_2 avec la probabilité 1/3, s'il est sur N_2 ou N_3, il ne peut pas aller sur B_2
D'où $p_{2,n} = \dfrac{1}{3}(q_{1,n} + q_{4,n})$
De même on obtient :$p_{3,n} = \dfrac{1}{3}(q_{1,n} + q_{2,n})$,$p_{4,n} = \dfrac{1}{3}(q_{3,n} + q_{4,n})$, $\quad p_{5,n} = \dfrac{1}{3}(q_{2,n} + q_{3,n})$

$$\boxed{V_n = BW_n \text{ avec } B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Par un raisonnement identique, en prenant $(B_{k,n-1})_{k=1,..,5}$ comme système complet d'événements :

$$\boxed{W_n = AV_{n-1} \text{ avec } A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}}$$

3.

$$\boxed{AB = M(\frac{1}{4}, \frac{1}{6})}$$

4. D'après 2.2;5, $(AB)^n = M\left(4^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^n, 2^{n-1}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)$

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad (AB)^n = M\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2x3^n}\right)}$$

5. Soit $n \geq 1, \quad (BA)^n = B(AB)^{n-1}A$
   $\forall n \geq 2, \quad (BA)^n = BM\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2x3^{n-1}}\right)A$
   Aprés calcul, on trouve la formule qui reste valable pour$n = 1$:

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad (BA)^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1+\frac{1}{3^{n-1}} & 1 & 1 & 1-\frac{1}{3^{n-1}} \\ 1 & 1 & 1+\frac{1}{3^{n-1}} & 1-\frac{1}{3^{n-1}} & 1 \\ 1 & 1 & 1-\frac{1}{3^{n-1}} & 1+\frac{1}{3^{n-1}} & 1 \\ 1 & 1-\frac{1}{3^{n-1}} & 1 & 1 & 1+\frac{1}{3^{n-1}} \end{pmatrix}}$$

6. $V_n = BW_n = BAV_{n-1}$
   Par récurrence immédiate :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad V_n = (BA)^n V_0}$$

7. A l'aide du calcul matriciel, $q_{1,n} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{5} 2q_{k,0} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{5} q_{k,0} = \frac{1}{3}$
   La probabilité d'être en B_1 après 2n déplacements vaut toujours 1/3., ne dépend pas de n. C'est logique: le coup d'avant , il est sur une case noire, et il a alors 1 chance sur 3 de se retrouver en B_1

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad P(B_{1,n}) = \frac{1}{3}}$$

8. $P(B_{1,n} \cap B_{1,n+1}) = \sum_{k=1}^{4} P(B_{1,n} \cap N_{k,n} \cap B_{1,n+1})$
   Par la formule des probabilités composées :
   $P(B_{1,n} \cap N_{k,n} \cap B_{1,n+1}) = P(B_{1,n})P(N_{k,n}/B_{1,n})\,P(B_{1,n+1}/B_{1,n} \cap N_{k,n}) = \frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$
   $P(B_{1,n} \cap B_{1,n+1}) = \frac{1}{9} = P(B_{1,n})P(B_{1,n+1})$

$$\boxed{\text{Les événements } B_{1,n} \text{ et } B_{1,n+1} \text{ sont indépendants}}$$

9. La phrase " la position de départ n'est pas obtenue à partir d'un déplacement du pion" n'est pas claire;
   On admet l'indépendance des $(B_{1,n})$;
   X est donc le nombre de succès obtenus lors de n épreuves (1 épreuve=2déplacements) indépendantes
   On reconnaît le shéma binomial

$$\boxed{X \text{ suit } B(n, \frac{1}{3}), \quad E(X) = \frac{n}{3}, V(X) = \frac{2n}{9}}$$

10. Y est le nombre d'épreuves nécessaires pour l'obtention du premier succés lors d'épreuves indépendantes
    On reconnaît le shéma géométrique :

$$\boxed{Y \text{ suit } G(\frac{1}{3}), \quad E(Y) = 3, V(Y) = 6}$$

Corrigé proposé par Martine Ginestet (UPA)
Pour toute remarque, me contacter , SVP : martine-ginestet@orange.fr