CONCOURS ADVANCE

4 mai 2019

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Consignes aux candidats

Durée de l'épreuve : 1h30

Vous devez commencer par remplir la partie administrative de votre fiche optique, avec indication de votre nom, prénom, et en cochant les cases de votre identifiant personnel : le numéro QCM.

- L'épreuve de Mathématiques se déroule sur 1h30 et est constituée de 6 questions obligatoires et de 6 questions à choisir parmi les questions numérotées de 7 à 14.
- Chaque question comporte cinq propositions : A, B, C, D, E.
- Pour chaque question :
    - Vous cochez la (ou les) case(s) **V** de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez vraie.
    - Vous cochez la (ou les) case(s) **F** de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez fausse.
    - Les cinq propositions peuvent être toutes vraies ou toutes fausses
- Toute case correctement remplie entraîne une bonification. Toute erreur est pénalisée. **Il est donc préféré une absence de réponse à une réponse inexacte.**
- Seule la fiche optique est ramassée en fin d'épreuve.

LES CALCULATRICES NE SONT PAS AUTORISÉES

Vérifiez que votre épreuve est constituée de 6 pages numérotées de 1 à 6. Dans le cas contraire, demandez un nouveau sujet.

Épreuve de mathématiques

Durée : 1 h 30

Questions obligatoires

1. a. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{2x^2+1} = \frac{1}{2}$.

   b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

   c. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln(x) = 0$.

   d. Si $2\ln(a)+1>0$ alors $a>\sqrt{e}$.

   e. Sur $]0,+\infty[$, la dérivée de la fonction $x \longmapsto x\ln(x)$ est la fonction $x \longmapsto \ln(x)$.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal d'origine O.
   Pour tout point M du plan, l'affixe de M est noté Z_M.
   A, B et C désignent trois points du plan distincts de O.

   a. Si $Z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}$ alors $|Z| = \dfrac{1}{2}$ et $\arg(Z) = \dfrac{7\pi}{12}\ [2\pi]$.

   b. Si $Z = -2\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$ alors $|Z| = 2$ et $\arg(Z) = -\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

   c. Si les points A et B sont symétriques par rapport à O alors $Z_A = \overline{Z_B}$.

   d. Si $|Z_A| = |Z_B| = |Z_C|$ alors ABC est un triangle équilatéral.

   e. Si $\arg(Z_A) = \pi + \arg(Z_B)\ [2\pi]$ alors O, A et B sont alignés.

3. f est une fonction définie et dérivable sur un ensemble D.

   a. Si $D=\mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ alors $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$.

   b. Si $D=\mathbb{R}^*$ et $f(x) = (x^2-x)e^{1/x}$ alors $f'(x) = e^{1/x}\left(\dfrac{2x^2-2x+1}{x}\right)$.

   c. Si $D=\mathbb{R}^*$ et $f(x) = \ln(x^2+1)$ alors $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

   d. $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \ln(2)$.

   e. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(2x+\pi)\,\mathrm{d}x = 0$.

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x}$ et $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère orthonormal. Soit d la droite d'équation $y = ex + 15$ et D la droite d'équation $y = x$.

   a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

   b. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

   c. Pour tout réel x, $f'(x) = (1-x)e^{1-x}$.

   d. Il existe une tangente T à $\mathscr{C}$ qui est parallèle à la droite d.

   e. $\mathscr{C}$ est en dessous de la droite D sur $]-\infty, 0[$.

5. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\big(\ln(x)\big)^2}{x}$, représentée par la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormal.

   Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{x}$, représentée par la courbe $\mathscr{C}'$.

   a. $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.

   b. Pour tout réel x strictement positif, $g'(x) = \dfrac{2\ln(x) - \big(\ln(x)\big)^2}{x^2}$.

   c. Pour tout réel x strictement positif, $\dfrac{g(x)}{2} = \left(\dfrac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2$.

   d. $\mathscr{C}$ admet une asymptote parallèle à l'axe des abscisses.

   e. $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{C}'$ sur $\left]\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$.

6. Un magasin d'électroménager vend deux modèles de robot au même prix et de marques M_1 et M_2.

   Les deux robots ont les mêmes caractéristiques et sont proposés en deux couleurs : noir et blanc.

   D'après une étude sur les ventes de ces deux modèles, 70 % des acheteurs ont choisi le robot M_1 et, parmi eux, 60 % ont préféré la couleur noire. Par ailleurs 20 % des clients ayant acheté un robot M_2 l'ont choisi de couleur blanche.

   On utilise la liste des clients ayant acheté l'un ou l'autre des robots précédemment cités et on choisit un client au hasard.

   Soient A et B deux événements indépendants d'un même univers Ω tels que $P(A) = 0{,}3$ et $P(A \cup B) = 0{,}65$.

   a. La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un robot M_2 de couleur noire est égale à $\dfrac{6}{25}$.

   b. La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un robot de couleur noire est égale à $\dfrac{6}{25}$.

   c. Le client a choisi un robot de couleur noire. La probabilité qu'il soit de marque M_2 est égale à $\dfrac{33}{50}$.

   d. La probabilité de l'événement B est égale à 0,5.

   e. A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Questions à choisir

7. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left((1-e^x)^2\right)$ et $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère orthonormal du plan.

   a. Pour tout $x \neq 0$, $f(x) > 0$.

   b. L'axe des abscisses est une asymptote de $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

   c. Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = 2\ln(1-e^x)$.

   d. Pour tout $x \neq 0$, $\big(f(x) > 0$ si et seulement si $x < 0\big)$.

   e. f est décroissante sur $]-\infty, 0[$.

8. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 2$.

   Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = -2u_n + 3n - \dfrac{21}{2}$.

   On considère l'algorithme ci-dessous.

   N est un entier, U est un réel
   $U \longleftarrow 1\,;\ N \longleftarrow 0\,;$
   Tant que $\big(U \leqslant 0$ ou $N = 0\big)$
   $\quad U \longleftarrow \dfrac{U}{3} + N - 2$
   $\quad N \longleftarrow N + 1$
   Fin Tant que
   Afficher U

   a. $u_3 = -\dfrac{14}{27}$.

   b. L'algorithme affiche la valeur de u_3.

   c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\big(n \geqslant 5 \Longrightarrow u_n \geqslant n - 3\big)$.

   d. (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

   e. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

9. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(v_{n+1}) = \ln(v_n) - 1$.

   a. Si pour tout réel x, $f'(x) < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante.

   b. (v_n) est une suite géométrique.

   c. (v_n) est convergente.

   d. La suite (t_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $t_n = (n^2 - 200)\sqrt{n}$ est décroissante.

   e. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = +\infty$.

10. f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

    a. Si pour tout réel $x > 1$, $1 + \dfrac{1}{x} < f(x) < \dfrac{x^2 + x + 100}{x^2 + 1}$ alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

    b. Si $f(x) = 2x + 3 - \sin(2x)$ alors pour tout réel x, $f(x) \leqslant 2x + 2$.

    c. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2x \sin\left(\frac{1}{2x}\right) = 1$.

    d. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3 + 2^n}{3 + 4^n} = 1$.

    e. Si $0 < x < 1$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left[(1 - x)^n (1 + x)^n\right] = +\infty$.

11. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal d'origine O, on considère les points E et F d'affixes respectives $-2 + i$ et $2 + 4i$ et $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z + 2 - i| = |z - 2 - 4i|$.
    Pour tout point M du plan, l'affixe de M est notée z_M.

    a. Le point G d'affixe $3 - \dfrac{3}{2}i$ appartient à $\mathscr{E}$.

    b. $\mathscr{E}$ est le cercle de diamètre $[EF]$.

    c. Le triangle OEF est rectangle.

    d. Si $z_A = 2 - 3i$, $z_B = -26 + 18i$ et $z_C = -2$ alors A, B et C sont alignés.

    e. Si $z_A = 3e^{2i\pi/3}$ et $z_B = 2e^{-5i\pi/6}$ alors le triangle OAB est rectangle.

12. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
    On considère les points suivants définis par leurs coordonnées : $A(1;-1;2)$, $B(3;3;8)$, $C(-3;5;4)$ et $D(1;2;3)$.

    On note d la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \ , t \in \mathbb{R} \\ z = -2 + 3t \end{cases}$

    On note d' la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 3 + k \ , k \in \mathbb{R} \\ z = 4 - k \end{cases}$

    On note P le plan d'équation $x + y - z + 2 = 0$.

    a. Le point C appartient à la droite d.

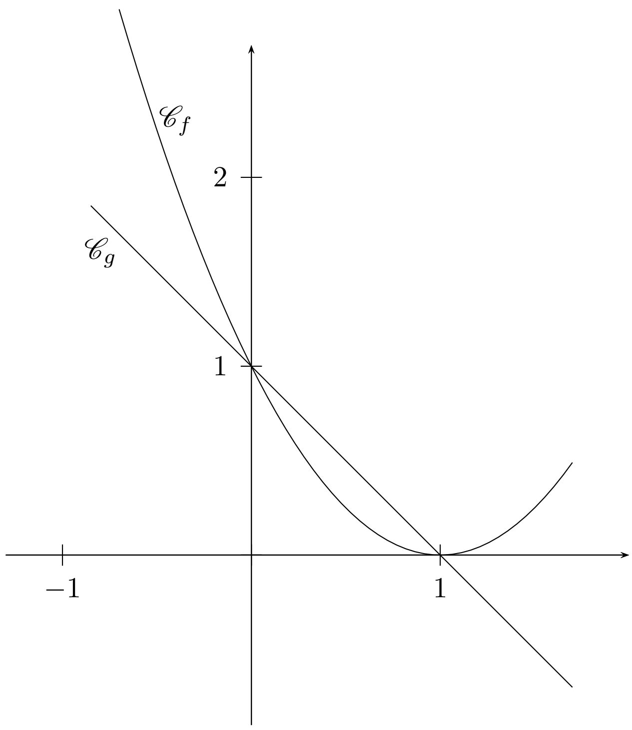
    b. Les droites d et d' sont parallèles.

    c. Le plan P contient la droite d et est orthogonal à la droite d'.

    d. Le triangle BCD est rectangle.

    e. On note P' le plan contenant la droite d' et le point A. Un vecteur normal à ce plan est : $\vec{n}(3;-1;2)$.

13. On considère les deux fonctions f et g définies par $f(x) = (x-1)^2$ et $g(x) = -x+1$ représentées graphiquement par leurs courbes respectives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



    Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

a. L'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ $\big($pour $x \in [0,1]\big)$ est égale à $\dfrac{1}{6}$.

b. $\displaystyle\int_0^1 (x-1)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$.

c. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

e. $\displaystyle\ln\left(\frac{3}{2}\right) < \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} \,\mathrm{d}x < \ln(2)$.

14. Le temps d'attente, exprimé en minutes, à un guichet, est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,7.

Marc se rend à son travail à pied ou en bus. Dans la ville où il habite, il pleut un jour sur quatre.
Lorsqu'il pleut, Marc se rend en bus à son travail dans 80 % des cas.
Lorsqu'il ne pleut pas, il se rend à pied à son travail dans 60 % des cas.

a. La probabilité qu'un client attende moins de 5 minutes à ce guichet est égale à $\dfrac{e^{3,5}-1}{e^{3,5}}$.

b. Sachant qu'un client attend depuis 5 minutes, la probabilité qu'il attende au total plus de 10 minutes à ce guichet est égale à $e^{-3,5}$.

c. Marc prend le bus un jour sur deux.

d. Soient A et B deux événements liés à une même épreuve aléatoire qui vérifient : $P(A) = 0{,}4$, $P_A(B) = 0{,}7$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}1$.

Alors la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé est égale à $\dfrac{14}{89}$.

e. Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans l'intervalle $[1, +\infty[$ et dont la loi de probabilité admet comme densité la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$.

Alors $P(1 \leqslant X \leqslant 4) = \dfrac{15}{16}$.