ÉPREUVE DE MATHEMATIQUES 2013 - Durée 1h30

QUESTIONS OBLIGATOIRES

Entourer la ou les bonnes réponses

1. Les raisonnements suivants sont corrects :

A. Tous les élèves s'appellent Bob. Or certains Bob ne sont pas doués. Donc certains élèves sont doués.

B. Tous les élèves doués s'appellent Bob. Or Bob n'est pas doué. Donc Bob n'est pas un élève.

C. La plupart des Bob ne sont pas doués. Or tous les élèves sont doués. Donc aucun élève ne s'appelle Bob.

D. La plupart des élèves s'appellent Bob. Or tous les Bob sont doués. Donc certains élèves sont doués.

E. Bob est doué. Or tous les élèves sont doués. Donc Bob est un élève.

2. La fonction f admet f' comme fonction dérivée sur son ensemble de définition :

A. $f(x) = \sin^2 x$ $\quad f'(x) = 2\cos x$

B. $f(x) = \ln(1+x^2)$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

C. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ $\quad f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

D. $f(x) = \dfrac{x+3}{x+5}$ $\quad f'(x) = -\dfrac{2}{(x+5)^2}$

E. $f(x) = x e^x$ $\quad f'(x) = (x+1)e^x$

3. Sachant que pour tout $t \in \mathbb{R},\ 2t^2 - t - 15 = (2t+5)(t-3)$, on peut en déduire que l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

A. $2(\ln x)^2 - \ln x - 15 = 0$ admet exactement deux solutions

B. $2e^{4x} - e^{2x} - 15 = 0$ admet une unique solution

C. $\ln(x-1) + \ln(3x+2) = \ln(x^2+13)$ admet une unique solution

D. $2(\ln x)^2 - \ln x - 15 = 2(\ln x - 3)$ admet exactement deux solutions

E. $2e^{2x} - 7e^x + 3 = 0$ admet exactement deux solutions

4. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}$

On note $\boldsymbol{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$
Alors :

A. $\boldsymbol{C}$ est symétrique par rapport à O

B. Pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f'(-x)=f'(x)$

C. Il existe un unique $a\in\mathbb{R}$ $f'(a)=0$

D. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

E. Pour tout $x\in[0,+\infty[$ $f(x)\leqslant x$

---

5. Soit f la fonction définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$

Alors :

A. Pour tout $x\in]0,+\infty[$ $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}$

B. $f'(4)=0$

C. Pour tout $x\in]0,+\infty[$ $f(x)>0$

D. L'équation $f(x)=x$ admet au moins une solution dans $]0,+\infty[$

E. La courbe de f admet une asymptote verticale

---

6. Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)$

Alors :

A. La courbe de f admet une asymptote horizontale

B. Pour tout $x\in]-1,+\infty[$ $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

C. f est décroissante sur $]-1,+\infty[$

D. $f(1)-1<0$

E. Il existe $x\in]0,1[$ $f(x)-x=0$

7. Soit $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x} dx$ et $J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin x} dx$

On a :

A. $I = \frac{8}{3}$

B. $I = -\ln\sqrt{3}$

C. $J = \ln\sqrt{3}$

D. $I + J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{2dx}{\sin 2x}$

E. $I + J = \ln 3$

---

8. On place un capital u_0 qui produit des intérêts s'ajoutant, chaque année, au capital précédent. On suppose que le taux d'intérêt est de 10% et qu'on ne prend ni ne remet d'argent sur ce compte. u_n désigne la valeur du capital disponible au bout de n années.
On donne log 2 = 0,301 et log (1,1) = 0,041
Alors :

A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n$

B. $u_3 = u_0 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 u_0$

C. (u_n) est croissante

D. Il faut 8 années pour au moins doubler le capital

E. Il faut 16 années pour au moins quadrupler le capital

QUESTIONS À CHOISIR

4 questions à choisir parmi les suivantes

9. Pour toute suite réelle (u_n)

A. Si (u_n) n'est pas majorée alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

B. Si (u_n) est croissante et majorée par 1 alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

C. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors (u_n) est croissante à partir d'un certain rang

D. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ alors (u_n) est positive à partir d'un certain rang

E. Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n + u_{n+1}}{2} = 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

10. Soit f la fonction définie et dérivable sur $I\!R$ par $f(x) = xe^{-2x} + 3$
On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$
Alors :

A. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

B. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

C. f est croissante sur $I\!R$

D. La tangente à C au point d'abscisse $x = 1$ a pour équation $y = 3 - e^{-2}x$

E. $f'(0)f'(2) < 0$

---

11. Soit f la fonction définie sur $I\!R$ par $f(x) = \sin^2 x + \cos x$
Alors :

A. Pour tout $x \in I\!R$ $f(-x) = f(x)$

B. f est périodique de période π

C. f est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

D. f est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

E. Pour tout $x \in [0, \pi]$ $f(x) \leq \frac{5}{4}$

---

12. Deux laboratoires proposent chacun leur vaccin contre la grippe. On sait qu'un quart de la population a utilisé le vaccin 1 et un sixième le vaccin 2. Il n'est pas possible pour un individu d'être vacciné deux fois. L'épidémie ayant eu lieu, on constate que 1% des malades ont utilisé le vaccin 1 et 0,6 % le vaccin 2. On choisit au hasard un individu dans la population, on note M = «l'individu est malade», I = «l'individu a reçu le vaccin 1», II = «l'individu a reçu le vaccin 2».
On a :

A. La probabilité que l'individu soit vacciné est $P(I) + P(II)$

B. Les données ne permettent pas de calculer $P_{\overline{I}}(M)$

C. $P(I) = \frac{1}{100}$

D. $P_M(\overline{II}) = 0,94$

E. $\frac{P_{\overline{II}}(M)}{P_{II}(M)} = \frac{P_M(\overline{II})P(II)}{P_M(II)P(\overline{II})}$

13. Un forain possède deux roues séparées en 10 secteurs égaux. Sur la première roue, il y a 3 secteurs rouges et 7 blancs, sur la deuxième 1 vert et 9 blancs. Les gains, représentés par la variable aléatoire X, sont les suivants :
5 euros si les deux roues tombent sur rouge et vert
2 euros si une seule des deux roues tombe sur blanc
1 euro si les deux roues tombent sur blanc
Alors :

A. $P(X=2)=\dfrac{17}{50}$

B. $P(X \geqslant 2)=\dfrac{37}{50}$

C. Si la mise est de 2 euros, la probabilité que le joueur soit bénéficiaire est $\dfrac{3}{10}$

D. Si la mise est de 2,5 euros alors le bénéfice moyen par partie du forain est supérieur à 1 euro

E. Si le forain veut un bénéfice moyen par partie d'au moins 60 centimes alors il doit demander une mise de 2 euros

---

14. On considère les nombres complexes $z=e^{i\pi/3}$ et $z'=\dfrac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$
Alors :

A. $z'=e^{i3\pi/4}$

B. $zz'=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

C. $zz'=e^{i13\pi/12}$

D. $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

E. $\tan\dfrac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$

---

15. Soit le nombre complexe $z = 1 + i$, alors :

A. $\dfrac{z^3}{\overline{z}} = \dfrac{1}{2} z^4$

B. $\dfrac{\overline{z}}{z^3} \in \mathbb{R}$

C. $\dfrac{\overline{z}^4}{z^2}$ est imaginaire pur

D. Il existe $n \in \mathbb{N}$, z^n est un réel strictement négatif

E. Il existe $n \in \mathbb{N}$ $\arg\left(z^n\right) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

---

16. Soit I, J et K trois points du plan tels que $IJ = 3$ $IK = 2$ et $\widehat{JIK} = \dfrac{\pi}{3}$

Soit L et M les points du plan définis par : $\overrightarrow{IL} = 2\overrightarrow{IJ} - 3\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IM} = -\overrightarrow{IJ} + 4\overrightarrow{IK}$

Alors :

A. $\overrightarrow{IL}.\overrightarrow{IK} = 3$

B. $\overrightarrow{IL}.\overrightarrow{IL} = 30$

C. $\overrightarrow{IL}.\overrightarrow{IM} = -33$

D. $\cos\left(\widehat{LIM}\right) = -\dfrac{11}{14}$

E. Une mesure de $\widehat{LIM}$ appartient à $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$

NOM

PRÉNOM

ÉPREUVE

F.O. n°72

Fiche optique conçue et réalisée par ProQCM

NUMERO

CHIFFRES

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

LETTRE

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

CONCOURS ADVANCE

ESME Sudria

EPITA ÉCOLE D'INGÉNIEURS EN INFORMATIQUE

IPSA

EXEMPLES DE MARQUAGE

BON

MAUVAIS

N° de question

N° : *10* N° : *12*

9 13 9 13
10 14 10 14
11 15 11 15
12 16 12 16

1er choix : 10 annulé

Second choix : 12 validé

CONSIGNES DE MARQUAGE

Détails au dos de ce document

Utilisez un feutre noir ou bleu !

Ne raturez pas, n'effacez pas ! Annulez votre première réponse par un double marquage et formulez votre nouvelle réponse dans la zone grisée :

Interprétation du marquage

V F V F
A
B
C
D
E

Réponses validées :
A=V, B=abst, C=F, D=V et E=abst

Questions obligatoires

1 V F V F A B C D E

2 V F V F A B C D E

3 V F V F A B C D E

4 V F V F A B C D E

5 V F V F A B C D E

6 V F V F A B C D E

7 V F V F A B C D E

8 V F V F A B C D E

Questions choisies

N° de question Réponses aux items

N° : ____ N° : ____
9 13 9 13
10 14 10 14
11 15 11 15
12 16 12 16
V F V F A B C D E

N° : ____ N° : ____
9 13 9 13
10 14 10 14
11 15 11 15
12 16 12 16
V F V F A B C D E

N° : ____ N° : ____
9 13 9 13
10 14 10 14
11 15 11 15
12 16 12 16
V F V F A B C D E

N° : ____ N° : ____
9 13 9 13
10 14 10 14
11 15 11 15
12 16 12 16
V F V F A B C D E

SIGNATURE (ne pas sortir du cadre prévu à cet effet)

NE RIEN INSCRIRE DANS CE CADRE

DM 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
M 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
C 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
D 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
U 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9