CORRIGÉ

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix}$.

Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$ est $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix}$. On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par: $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n$.

On note $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. *Calculer X_2.*

On a $X_2 = AX_1 + BX_0 = \begin{pmatrix} -19 \\ -22 \\ -19 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ -30 \\ -27 \end{pmatrix}$.

2.a) *Déterminer le rang des matrices A, $A - I$ et $A + 4I$.*

Le rang (noté rg) d'une matrice M est la dimension de l'image de l'endomorphisme associé dans une base ou encore la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de M. Les deux premières colonnes de A sont égales et la troisième colonne n'est pas colinéaire à l'une des deux premières. On a donc $\boxed{\mathrm{rg}(A) = 2.}$

On a $A - I = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -14 \\ 6 & 5 & -16 \\ 5 & 5 & -15 \end{pmatrix}$. Pour cette matrice: la première colonne plus deux fois la deuxième plus la troisième vaut 0 et les deux premières colonnes ne sont pas colinéaires. On a donc $\boxed{\mathrm{rg}(A - I) = 2.}$

On a $A + 4I = \begin{pmatrix} 9 & 5 & -14 \\ 6 & 10 & -16 \\ 5 & 5 & -10 \end{pmatrix}$. La somme de ses colonnes vaut 0 et la première n'est pas colinéaire à la deuxième. On a donc $\boxed{\mathrm{rg}(A + 4I) = 2.}$

b) *En déduire que les sous-espaces $E = \{X \in \mathbb{R}^3; AX = 0\}$, $F = \{X \in \mathbb{R}^3; AX = X\}$ et $G = \{X \in \mathbb{R}^3; AX = -4X\}$ sont tous de dimension* 1.

On note $\mathrm{Ker}(M) = \{X \in \mathbb{R}^3; MX = 0\}$ le noyau d'une matrice M.
On a $E = \{X \in \mathbb{R}^3; AX = 0\} = \mathrm{Ker}(A)$, $F = \{X \in \mathbb{R}^3; AX = X\} = \mathrm{Ker}(A - I)$ et $G = \{X \in \mathbb{R}^3; AX = -4X\} = \mathrm{Ker}(A + 4I)$. Par la théorème du rang et la question précédente, ces espaces sont tous de dimension 1.

c) *Déterminer $\vec{u}$ un vecteur qui engendre E, $\vec{v}$ un vecteur qui engendre F et $\vec{w}$ un vecteur qui engendre G.*

On rappelle que les colonnes d'une matrice d'un endomorphisme dans une base, correspondent aux coordonnées dans cette base, des images des vecteurs de cette base. D'après la question 2a), on a $f(e_1) - f(e_2) = 0$ soit par linéarité $f(e_1 - e_2) = 0$. Le vecteur $\vec{u} = e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est dans E et comme cet espace est de dimension 1, $\vec{u}$ engendre E. On raisonne de même pour les espaces F et G. On peut prendre $\vec{v} = e_1 + 2e_2 + e_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ engendrant F et $\vec{w} = e_1 + e_2 + e_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ engendrant G.

d) *Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis écrire la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}_c$ à cette nouvelle base $\mathcal{B}$.*

La famille $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est constituée de trois vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$ de dimension 3. Il suffit de montrer que cette famille est libre. Pour $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, on a:

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha+\beta+\gamma & = & 0 \\ -\alpha+2\beta+\gamma & = & 0 \\ \beta+\gamma & = & 0 \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow L_2+L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} \alpha+\beta+\gamma & = & 0 \\ 3\beta & = & -2\gamma \\ \gamma & = & -\beta \end{array}\right.$$

$\iff \alpha = \beta = \gamma = 0$.

La famille $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}_c$ à cette nouvelle base $\mathcal{B}$ est $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & 2 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

3. *Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, notée D. Déterminer la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$, notée Δ.*

On a $f(\vec{u}) = 0$ car $\vec{u} \in E$, $f(\vec{v}) = v$ car $\vec{v} \in F$ et $f(\vec{w}) = -4\vec{w}$ car $\vec{w} \in G$.

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -4\end{pmatrix}$.

On a par calculs: $g(\vec{u}) = B\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = 4\vec{u}$ de même $g(\vec{v}) = B\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \vec{0}$ et $g(\vec{w}) = B\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = -4\vec{w}$.

La matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est donc $\Delta = \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & -4\end{pmatrix}$.

Formules de changement de bases: $\boxed{A = PDP^{-1} \text{ et } B = P\Delta P^{-1}.}$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Y_n = P^{-1}X_n = \begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}$.

a) *Montrer que $Y_0 = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $Y_1 = \begin{pmatrix}-1\\-3\\4\end{pmatrix}$.*

On a: $(Y_0 = P^{-1}X_0$ et $Y_1 = P^{-1}X_1) \iff (X_0 = PY_0$ et $X_1 = PY_1)$, qui est vérifié car $P\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = X_0$ et $P\begin{pmatrix}-1\\-3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = X_1$.

b) *Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n \iff Y_{n+2} = DY_{n+1} + \Delta Y_n$.*

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 3, on a:
$X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n \iff P^{-1}X_{n+2} = P^{-1}AX_{n+1} + P^{-1}BX_n \iff Y_{n+2} = DP^{-1}X_{n+1} + \Delta P^{-1}X_n \iff Y_{n+2} = DY_{n+1} + \Delta Y_n$.

c) *Montrer que:* $\forall n \geqslant 0,\ x_n = ((-1)^n - 1)2^{n-2}$, $\forall n \geqslant 1,\ y_n = -3$ *et* $\forall n \geqslant 0,\ z_n = (-1)^n(1-2n)2^{n+1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $Y_{n+2} = DY_{n+1} + \Delta Y_n$ donne $\begin{cases} x_{n+2} &= 4x_n \\ y_{n+2} &= y_{n+1} \\ z_{n+2} &= -4z_{n+1} - 4z_n \end{cases}$

La deuxième équation permet d'avoir: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{y_n = y_1 = -3.}$ On pose: $\forall n \geqslant 0,\ x'_n = ((-1)^n - 1)2^{n-2}$ et $\forall n \geqslant 0,\ z'_n = (-1)^n(1-2n)2^{n+1}$. On vérifie que $x'_0 = x_0$, $x'_1 = x_1$ et $z'_0 = z_0$, $z'_1 = z_1$, puis que (x'_n) (resp. z'_n) vérifie la même relation de récurrence que (x_n) (resp. (z_n)). On a donc pour tout n, $x'_n = x_n$ et $z'_n = z_n$.

Remarque: On peut démontrer le résultat plus rapidement si on connait les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants. La résolution des équations caractéristiques $r^2 - 4 = 0$ et $r^2 + 4r + 4 = 0$ permettent de conclure.

5. *Déterminer une expression de X_n en fonction de n.*

On a par 4c): $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = PY_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ((9-16n)(-1)^n - 1)2^{n-2} - 3 \\ ((7-16n)(-1)^n + 1)2^{n-2} - 6 \\ (1-2n)(-1)^n 2^{n+1} - 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

1. *Déterminer le domaine de définition et la dérivée sur ce domaine de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$.*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + e^x > 0$, la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

2. *Déterminer la solution y de l'équation différentielle $(1+e^x)y' + e^x y = 1$ vérifiant $y(\ln(2)) = \dfrac{1}{3}$.*

La solution générale de l'équation homogène $(E_0) : (1+e^x)y' + e^x y = 0$ qui est équivalente à $y' + f'(x)y = 0$ est $y : x \mapsto \lambda e^{-f(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $y : x \mapsto \dfrac{\lambda}{1+e^x}$.

On cherche une solution particulière de $(E) : (1+e^x)y' + e^x y = 1$ de la forme $y : x \mapsto \lambda(x)e^{-f(x)}$. Sachant que $x \mapsto e^{-f(x)}$ est solution de E_0, cette fonction y est solution de (E) si et seulement si $(1+e^x)\lambda'(x)e^{-f(x)} = 1$ soit $(1+e^x)\dfrac{\lambda'(x)}{1+e^x} = 1$ ce qui donne $\lambda'(x) = 1$ et on peut prendre comme solution particulière de (E), $y : x \mapsto \dfrac{x}{1+e^x}$. La solution générale de (E) est alors $\boxed{y : x \mapsto \dfrac{\lambda + x}{1+e^x}.}$ On doit avoir $y(\ln(2)) = \dfrac{1}{3}$ soit $\dfrac{1}{3} = \dfrac{\lambda + \ln(2)}{3}$ et $\lambda = 1 - \ln(2)$. La solution y de l'équation différentielle $(1+e^x)y' + e^x y = 1$ vérifiant $y(\ln(2)) = \dfrac{1}{3}$ est $\boxed{y : x \mapsto \dfrac{x + 1 - \ln(2)}{1+e^x}.}$

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, montrons que:

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{(n+1)(x^{n+1} - x^n) - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}$$

D'une part $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^k = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$. D'autre part, pour $x \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x-1}$, on obtient en dérivant $x \mapsto \dfrac{x^{n+1} - 1}{x-1}$ la formule demandée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une boite contient 2 boules portant le numéro 0 et pour tout entier k compris entre 1 et n, 2^k boules portant le numéro k.

2. *Justifier que la boite contient 2^{n+1} boules.*

On a 2 boules portant le numéro 0, puis 2^k boules portant le numéro k. La boite contient $2+\sum_{k=1}^{n} 2^k = 1+f(2)$ boules soit $1 + \dfrac{2^{n+1}-1}{2-1}$ qui vaut 2^{n+1}.

3. *On tire une boule de cette boite et on note X la variable aléatoire associée au numéro obtenu.*

a) Il y a équiprobabilité. A l'aide de 2, on a : $P(X=0) = \dfrac{2}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2^n}$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $P(X=k) = \dfrac{2^k}{2^{n+1}}$.

b) On a à l'aide de 3a) et de 1: $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{2^k}{2^{n+1}} = \frac{2}{2^{n+1}}f'(2) = n-1+\frac{1}{2^n}$.
Un équivalent de $E(X)$ lorsque $n \to +\infty$ est n.

4. *On tire une à une avec remise deux boules de la boite et on appelle Y la variable aléatoire associée au plus grand des numéros obtenus sur les deux tirages.*

a) *Déterminer la probabilité $P(Y=0)$, puis pour tout $k \geqslant 1$, $P(Y \leqslant k)$.*

Il y a équiprobabilité. On a $P(Y=0) = P(X=0) \times P(X=0) = \dfrac{2^2}{2^{2n+2}} = \dfrac{1}{2^{2n}}$. Pour $k \geqslant 1$, comme il y a 2^{k+1} boules dont le numéro est inférieur ou égal à k, on a $P(Y \leqslant k) = \dfrac{2^{k+1}}{2^{n+1}} \times \dfrac{2^{k+1}}{2^{n+1}} = \dfrac{2^{2k}}{2^{2n}}$. On remarque que $P(Y \leqslant k) = \dfrac{2^{2k}}{2^{2n}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b) *En déduire la loi de Y.*

Par la question précédente, $P(Y=0) = \dfrac{1}{2^n}$ et pour tout $k \geqslant 1$, $P(Y=k) = P(Y \leqslant k) - P(Y \leqslant k-1)$ soit $P(Y=k) = 3\dfrac{2^{2k-2}}{2^{2n}}$.

c) *Déterminer l'espérance $E(Y)$ de Y. Donner un équivalent de $E(Y)$ lorsque $n \to +\infty$.*

On a $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(Y=k) = \frac{3}{2^{2n}}\sum_{k=1}^{n} k4^{k-1} = \frac{3}{2^{2n}}f'(4) = n - \frac{1}{3} + \frac{1}{3\times 4^n}$.
Un équivalent de $E(Y)$ lorsque $n \to +\infty$ est n, comme celui de $E(X)$.

Exercice 4

On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ et pour $x \in]0,1[$, $I_x = \displaystyle\int_0^x \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ et $J_x = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1}$.

1. Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $u \mapsto \ln(1+u)$ est $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \mathrm{o}(u^2)$, le développement limité à l'ordre 2 en 1 de $t \mapsto \ln(t)$ est donc $\boxed{(t-1) - \frac{(t-1)^2}{2} + \mathrm{o}((t-1)^2).}$

2. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln(t)}$ est continue sur $]0,1[$, $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} f(t) = 0$ et f est prolongeable par continuité en 0, l'intégrale I_x existe pour tout $x \in]0,1[$. De plus, par la question 1, $\dfrac{t-1}{\ln(t)} \underset{t\to 1^-}{\sim} \dfrac{t-1}{t-1}$, $\displaystyle\lim_{t\to 1^-} f(t) = 1$ et f est prolongeable par continuité en 1. Les trois arguments (continuité, limites en 0 et en 1) donnent l'existence de I.

3. Soit $x \in]0,1[$, alors $t-1<0$ pour $t \in [x^2, x]$. On a:
$J_x = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} = [\ln|t-1|]_x^{x^2} = [\ln(1-t)]_x^{x^2} = \ln(1-x^2) - \ln(1-x) = \ln(1+x)$.
On en déduit que $\boxed{\lim_{x\to 1} J_x = \ln(2).}$

4. Soit $x \in]0,1[$. Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ et $t \mapsto \dfrac{t}{\ln(t)}$ ont pour limites 0 en 0, donc sont intégrables sur $]0,x]$. On peut écrire:

$$I_x = \int_0^x \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{2t}{\ln(t^2)}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$$

après avoir effectuer le changement de variable $u = t^2$ dans $\displaystyle\int_0^x \frac{2t}{\ln(t^2)}\,\mathrm{d}t$ et par la relation de Chasles.

5. D'après la question précédente et la définition de J_x, on a:

$$I_x - J_x = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} - \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} = \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t = \int_x^{x^2} \frac{t-1-\ln(t)}{(t-1)\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{t-1-\ln(t)}{(t-1)\ln(t)}$ est continue sur $[a,1[$ pour tout $a>0$.

D'après la question 1, $t-1-\ln(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} \dfrac{(t-1)^2}{2}$ et $(t-1)\ln(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} (t-1)^2$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{t-1-\ln(t)}{(t-1)\ln(t)} = \frac{1}{2}$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^1 \frac{t-1-\ln(t)}{(t-1)\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ converge et pour tout $a>0$:

$$\lim_{x\to 1}(I_x - J_x) = \lim_{x\to 1}\left(\int_a^{x^2} \frac{t-1-\ln(t)}{(t-1)\ln(t)}\,\mathrm{d}t - \int_a^{x} \frac{t-1-\ln(t)}{(t-1)\ln(t)}\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^{1} \frac{t-1-\ln(t)}{(t-1)\ln(t)}\,\mathrm{d}t - \int_a^{1} \frac{t-1-\ln(t)}{(t-1)\ln(t)}\,\mathrm{d}t = 0$$

On en déduit à l'aide de 3, que $\boxed{I = \lim_{x\to 1} I_x = \lim_{x\to 1} J_x = \ln(2).}$