CORRIGÉ

Exercice 1

1. $f(x)$ est définie si et seulement si $x^3-3x^2 \neq 0$. Or $x^3-3x^2 = x^2(x-3)$, donc $x^3-3x^2 \neq 0$ si et seulement si $x \neq 0$ et $x \neq 3$.

L'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0,3\}$.

2. On écrit, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,3\}$

$$\frac{x^2+2x+3}{x^3-3x^2} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x-3} = \frac{a(x-3)+bx(x-3)+cx^2}{x^2(x-3)} = \frac{(b+c)x^2+(a-3b)x-3a}{x^3-3x^2}$$

Soit par identification:

$$\begin{cases} b+c &= 1 \\ a-3b &= 2 \\ -3a &= 3 \end{cases}$$

On obtient $a=-1$, $b=-1$ et $c=2$.

3. On a

$$f(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-3}$$

donc, en intégrant terme à terme sur $]3,+\infty[$, on voit que la fonction

$$\frac{1}{x} - \ln x + 2\ln(x-3) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{(x-3)^2}{x}\right)$$

est une primitive de f sur $]3,+\infty[$.

4. La solution générale de l'équation différentielle : $y' - f(x)y = 0$, sur l'intervalle $]3,+\infty[$ est donnée par la formule

$$y(x) = C\exp\left(\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{(x-3)^2}{x}\right)\right) = C\frac{(x-3)^2}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice 2

1. Les trois colonnes de A sont proportionnelles, donc A est de rang 1.

2. On trouve $AB=0$.

Si $Y \in \operatorname{Im} B$, alors il existe X tel que $Y = BX$. On aura donc $AY = A(BX) = (AB)X = 0$. D'où $Y \in \operatorname{Ker} A$.

Ce qui prouve que $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Ker} A$.

3. a) Comme $AB=0$, si B était inversible, on aurait $A = AB\,B^{-1} = 0$, ce qui est absurde. Donc B n'est pas inversible.

b) B n'étant pas inversible, $\operatorname{rg} B \leq 2$. D'autre part , comme les deux premières colonnes de B ne sont pas proportionnelles, on a $\operatorname{rg} B \geq 2$. Par conséquent $\operatorname{rg} B = 2$. D'après le théorème du rang:

$$3 = \dim \operatorname{Ker} A + \operatorname{rg} A$$

Comme $\text{rg}\, A = 1$, on obtient $\dim \text{Ker}\, A = 2$, et par suite $\dim \text{Ker}\, A = \dim\ \text{Im}\, B$.

Or d'après la question **2.**, $\text{Im}\, B \subset \text{Ker}\, A$, il s'en suit que $\text{Im}\, B = \text{Ker}\, A$.

c) Matriciellement , le système s'écrit

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Pour qu'il ait une solution il faut et il suffit que $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \text{Im}\, B = \text{Ker}\, A$

Or

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \text{Ker}\, A \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha + 2\beta + 4\gamma = 0$$

Ainsi

$$\alpha + 2\beta + 4\gamma = 0$$

est une condition nécessaire et suffisante pour que le système admette une solution.

Exercice 3

1. a) Le nombre de boules blanches étant égal à 3, Jean a $\binom{3}{2}$ possibilités de tirer 2 boules blanches. Il y a un total de $\binom{6}{2}$ tirages possibles car Jean tire 2 boules parmi 6 simultanément. La probabilité recherchée est donc:

$$p = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{5}$$

b) Les couples donnant un produit supérieur à 13 sont:

$$(3,6); (4,6); (5,6); (6,6); (3,5); (4,5); (5,5); (6,5); (4,4); (5,4); (6,4); (5,3); (6,3)$$

ils sont au nombre de 13. Il y a 36 couples possibles car les dés sont lancés deux fois de suite indépendamment. La probabilité d'obtenir deux nombres dont le produit est supérieur à 13 est donc:

$$q = \frac{13}{36}$$

2. Pour gagner au deuxième essai, il faut que Jean tire au moins une boule noire au premier essai, que Martine perde (ce qui est probable avec une probabilité de $1 - \frac{13}{36} = \frac{23}{36}$), puis que Jean tire deux boules blanches à son deuxième essai. Les événements étant indépendants, la probabilité vaut:

$$P = (1-p)(1-q)p = \frac{4}{5} \times \frac{23}{36} \times \frac{1}{5} = \frac{23}{225}$$

Exercice 4

1. g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. $g'(x) = 1 - \frac{1}{2}\cos x > 0$ pour tout x.

g est donc strictement croissante.

Pour tout $x \neq 0$, on peut écrire $g(x) = x(1 - \frac{1}{2x}\sin x - \frac{1}{x})$.

Or

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2x}\sin x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x}\sin x = 0$$

car la fonction sinus est bornée, donc

$$\lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{1}{2x}\sin x - \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{2x}\sin x - \frac{1}{x} = 1$$

et par suite

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, g est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donc elle s'annule en un unique point que nous notons α.

2. On a $f'(x) = \frac{1}{2}\cos x$. Donc $|\,f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout x. D'après le théorème des accroissements finis, nous avons

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|.$$

3. a) Nous allons montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; |x_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|\alpha|$$

Le résultat est évident pour $n = 0$ car $x_0 = 0$.

Supposons que le résultat soit vrai pour n.

Comme $f(\alpha) = \alpha$ et $x_{n+1} = f(x_n)$, on a d'après la question **2.**,

$$|\,x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|\,x_n - \alpha|$$

et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$|\,x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}|\,\alpha| = \frac{1}{2^{n+1}}|\,\alpha|$$

Ce qui prouve le résultat à l'ordre $n + 1$ et achève la démonstration.

b) D'après la question précédente ,

$$\forall n \in \mathbb{N} \ |\, x_n - \alpha| \ \leq \frac{1}{2^n} |\, \alpha|$$

Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, le théorème d'encadrement assure la convergence de la suite (x_n) converge vers α.