MATHÉMATIQUES

Programme, conseils, bibliographie

Public concerné

Tout candidat bachelier ayant suivi deux années universitaires (Licence 2 Sciences, Licence 2 Économie...) ou de niveau équivalent (BTS, IUT, classes préparatoires Math Spé...).

Nature de l'épreuve

Première partie

L'épreuve de mathématiques du concours Passerelle 1 a pour but de tester la bonne assimilation du programme par les candidats, leur capacité de raisonnement et leur aptitude à rédiger et expliquer.

Deuxième partie

Le sujet est composé de trois exercices indépendants portant sur l'algèbre linéaire, l'analyse et les probabilités-statistiques, conçus, sans grande difficulté théorique, de telle sorte qu'un candidat sérieusement préparé soit en mesure d'aborder l'ensemble des questions.

Programme

A) Algèbre linéaire

a) Espaces vectoriels de dimension finie :

- vecteurs de IRn : opérations internes et externes sur IRn (généralisation à partir de n = 2 et n = 3) ;
- structure d'espace vectoriel ;
- dépendance et indépendance linéaires ;
- vecteurs générateurs ;
- base d'un espace vectoriel : définition.

b) Matrices :

- définition (tableau de nombres) ;
- addition, multiplication par un scalaire, multiplication de deux matrices ;
- calcul de l'inverse d'une matrice carrée et application à l'équation matricielle AX = B.

c) Applications linéaires en dimension finie :

- rang d'une application linéaire, formule reliant le rang, la dimension du noyau et celle de l'espace de départ ;
- image par une application linéaire d'une famille liée, d'une famille génératrice, d'un sous-espace vectoriel de l'espace de départ.

B) Analyse

a) Suites

b) Fonctions numériques :

- fonctions logarithme népérien, exponentielles et puissances ;
- limites, asymptotes ;
- dérivation ;

- primitives d'une fonction continue sur un intervalle ;
- maxima et minima d'une fonction ;
- représentation graphique.

c) Calcul intégral :
- intégrale d'une fonction continue sur un segment ;
- propriétés de l'intégrale ;
- intégration par parties.

C) Statistiques et probabilités
a) Définition d'une probabilité et propriétés ;
b) Événements indépendants et dépendants relativement à une probabilité ;
c) Variable aléatoire (ou aléa numérique) prenant un nombre fini de valeurs réelles ;
d) Distribution (ou loi) de probabilité ;
e) Fonction de répartition ;
f) Espérance mathématique, variance, écart type ;
g) Distributions usuelles de probabilité ;
h) Distribution de Bernouilli, binomiale ;
i) Distribution de Poisson : approximation de la distribution binomiale par la loi de Poisson ;
j) Distribution normale.

Conseils de préparation

Après avoir bien lu le programme, le candidat doit noter les points inconnus ou trop flous.
Il doit avant tout revoir le cours pour consolider ou apprendre les différentes notions définies dans le programme, ainsi que les résultats (théorèmes et leurs corollaires...) qui en découlent. À chaque notion acquise, le candidat doit tester son degré d'assimilation en faisant de petits exercices.
Les différentes notions du programme étant acquises, le candidat doit faire beaucoup d'exercices et d'annales (en particulier du concours Passerelle 1) sans surtout se précipiter sur la correction.

Bibliographie

- Jean-Marie Monier, *Cours et Exercices*, collection « J'intègre », éd. Dunod.
- Simon et Blume, *Mathématiques pour économistes*, éd. Économica.
- *Recueil d'exercices et résumés de cours*, coll. « Flash U », éd. Armand Collin.
- Tout livre d'analyse et d'algèbre linéaire de 1er cycle universitaire (1re année).

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 2 HEURES.

CONSIGNES

Aucun document n'est autorisé.
Calculatrices interdites.

TRAITEZ OBLIGATOIREMENT TROIS EXERCICES :
Le candidat précisera en début de copie son choix entre l'exercice 3 et l'exercice 4.
- Exercice 1
- Exercice 2
- Exercice 3 ou 4

SUJET

Exercice 1

Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 4. Si P est une fonction de E, on note P' sa dérivée et pour tout $a \in \mathbb{R}$, $x \mapsto P'(x+a)$ est la composée de P' et de la fonction $x \mapsto x+a$.
Par exemple, si $a = 2$ et $P : x \mapsto (x-1)^2$ alors $x \mapsto P'(x+a)$ est la fonction $x \mapsto 2(x+1)$.

1. Soit φ l'application définie sur E par :

$$\forall\, P \in E, \qquad \varphi(P) \ : x \mapsto P'(x+1) + P'(x-1) - P'(x)$$

Montrer que φ est un endomorphisme de E.

2. Soit pour tout $k \in \{0,1,2,3,4\}$, l'élément $e_k \in E$ définie par $e_k \ : x \mapsto x^k$. On rappelle que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2, e_3, e_4)$ forme une base de E.

Montrer que la matrice A de φ dans $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Déterminer le rang de φ, puis la dimension du noyau de φ. En déduire $\mathrm{Im}(\varphi)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

4. Les sous-espaces $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont-ils supplémentaires dans E ?

5. Démontrer la propriété suivante :
La fonction P est solution de l'équation $P'(x+1) + P'(x-1) - P'(x) = 1 - 6x + 3x^2 - 4x^3$ si et seulement si, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \alpha - 5x + 9x^2 + x^3 - x^4$.

Exercice 2

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On rappelle que le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}}$, fonction que l'on ne cherchera pas à simplifier dans cette question.

a) Si F est la primitive s'annulant en 0 de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = F(x^2) - F(x)$.

b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.

c) Montrer que le développement limité de f en 0 à l'ordre 4 est $f(x) = -x + x^2 + \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4)$.

2. a) Déterminer la dérivée de la fonction $t \mapsto \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)$.

b) Soit $g\ : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x^2 + \sqrt{x^4+1}}{x + \sqrt{x^2+1}}\right)$.

Déduire des questions précédentes, la valeur pour $k \in \{1,2,3,4\}$, de $g^{(k)}(0)$ (dérivée k-ième de g en 0).

Vous traiterez au choix l'exercice 3 ou l'exercice 4.

Exercice 3

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules noires et des boules blanches. L'urne U_1 contient des boules blanches en proportion $\frac{1}{3}$ et l'urne U_2 contient des boules blanches en proportion $\frac{1}{5}$. On effectue $N \in \mathbb{N}^*$ tirages successifs avec remise de la boule dans l'urne d'où elle provient, avec le protocole suivant :

On choisit l'urne au hasard au premier tirage, si la boule est blanche, on tire la boule suivante dans la même urne et si elle est noire, on tire la boule suivante dans l'autre urne.

Pour tout $n \in \{1,\dots,N\}$, on appelle A_n l'évènement " le n-ième tirage est effectué dans l'urne U_1 " et B_n l'évènement " on tire une boule blanche lors du n-ième tirage ". On pose $p_n = P(A_n)$ et $q_n = P(B_n)$.

1. Calculer les nombres p_1, q_1, p_2 et q_2.

2. Pour tout $n \in \{2,\dots,N\}$, démontrer que $p_n = ap_{n-1} + b$ avec $a = -\dfrac{7}{15}$ et $b = \dfrac{4}{5}$.

3. Soit ℓ tel que $\ell = a\ell + b$, montrer que la suite $(p_n - \ell)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison a.

4. Pour tout $n \in \{1,\dots,N\}$, déterminer p_n et q_n en fonction de n.

Exercice 4

Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et I la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

1.a) Calculer $(A-2I)^2$.

b) Déduire de a), l'ensemble des valeurs propres de A.

c) A l'aide de a), montrer que la matrice A est inversible et donner son inverse.

2. La matrice A est-elle diagonalisable ? La matrice A est-elle trigonalisable ?

3. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.