CORRIGÉ

Exercice 1

1. En posant $u = 1 - t$, $I_1 = \int_0^1 \sqrt{1-t}\,dt = \int_0^1 \sqrt{u}du = \left[\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

Pour calculer I_2, on effectue le changement de variable $t = \sin x$. Ainsi

$$I_2 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 x}\,\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1]$, $0 \leq t^{n+1} \leq t^n \leq 1$ donc $0 \leq 1 - t^n \leq 1 - t^{n+1} \leq 1$. Par suite, $\sqrt{1-t^n} \leq \sqrt{1-t^{n+1}} \leq 1$ et finalement en intégrant sur $[0,1]$: $I_n \leq I_{n+1} \leq 1$.

Donc la suite (I_n) est croissante et majorée par 1, d'où sa convergence.

3. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1]$, alors $0 \leq 1 - t^n \leq 1$, puis $0 \leq \sqrt{1-t^n} \leq 1$, et en élevant au carré, on obtient

$$1 - t^n \leq \sqrt{1-t^n}$$

.

D'autre part, $(1 - \frac{t^n}{2})^2 - (1 - t^n) = \frac{t^{2n}}{4} \geq 0$, donc $1 - t^n \leq (1 - \frac{t^n}{2})^2$

La croissance de la fonction racine carrée montre que:

$$\sqrt{1-t^n} \leq 1 - \frac{t^n}{2}.$$

4. L'encadrement obtenu en 3. donne par intégration:

$$\int_0^1 (1-t^n)\,dt \leq \int_0^1 \sqrt{1-t^n}\,dt \leq \int_0^1 1 - \frac{t^n}{2}\,dt$$

Or $\int_0^1 (1-t^n)\,dt = \left[t - \frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{n+1}$

et $\int_0^1 1 - \frac{t^n}{2}\,dt = 1 - \frac{1}{2(n+1)}$.

Donc: $1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1 - \frac{1}{2(n+1)}$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient, par encadrement: $\lim_{n\to+\infty} I_n = 1$

Exercice 2

1. On obtient

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -4 & -4 & 12 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

et $A^3 = 0$.

2. La matrice représentant $B' = \{e_1, f(e_1), f^2(e_1)\}$ dans la base canonique s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\det M = -2$, donc M est inversible et par suite B' est une base.

3. Comme $f^3 = 0$, on obtient

$$\mathrm{M}at_{B'}\, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{M}at_{B'}\, f^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. α, β, γ sont les solutions du système

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 2\gamma & = 0 \\ 5\beta - 4\gamma & = 1 \\ 2\beta - 2\gamma & = 0 \end{cases}$$

ce qui donne: $\alpha = \beta = \gamma = 1$

5. Compte tenu de $f^3 = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} g(e_1) &= e_2 = e_1 + f(e_1) + f^2(e_1) \\ g(f(e_1)) = f(g(e_1)) = f(e_2) &= f(e_1 + f(e_1) + f^2(e_1)) = f(e_1) + f^2(e_1) \\ g(f^2(e_1)) &= f(g(f(e_1))) = f^2(e_1) \end{aligned}$$

La matrice de g dans la base B' s'écrit donc:

$$\mathrm{M}at_{B'} g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) On voit que: $\mathrm{M}at_{B'}\, g = I + \mathrm{M}at_{B'}\, f + \mathrm{M}at_{B'}\, f^2$ (où I est la matrice identité).

Ainsi, $g = id_{\mathbb{R}^3} + f + f^2$

c) D'après la question précédente, on a

$$\mathrm{M}at_B\, g = I + A + A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

1. X suit la loi binomiale $B(9, \frac{4}{9})$ et son espérance vaut 4.

2. $Y(\Omega) = \{1, \cdots, 9\}$.

Soit k fixé tel que $1 \leq k \leq 9$. utilisons le système complet d'événements $(X = j)_{0 \leq j \leq 9}$ et la formule des probabilités totales pour calculer $P(Y = k)$:

$$P(Y = k) = \sum_{j=0}^{9} P(Y = k | X = j) P(X = j)$$

D'après les hypothèses : $P(Y = k|X = 0) = \frac{1}{9}$, $P(Y = k|X = k) = 1$

et si $j \neq 0$ et $j \neq k$ $P(Y = k|X = j) = 0$

On en déduit donc: $P(Y = k) = P(Y = k|X = 0)P(X = 0) + P(Y = k|X = k)P(X = k)$

Soit : $P(Y = k) = \frac{1}{9}P(X = 0) + P(X = k)$

Ainsi: $P(Y = k) = \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{5}{9}\right)^9 + \dbinom{9}{k}\left(\dfrac{4}{9}\right)^k\left(\dfrac{5}{9}\right)^{9-k}$

$E(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{9} kP(Y = k) = \sum_{k=1}^{9} k\frac{1}{9}\left(\frac{5}{9}\right)^9 + \sum_{k=1}^{9} k\binom{9}{k}\left(\frac{4}{9}\right)^k\left(\frac{5}{9}\right)^{9-k}$

La première somme s'écrit: $\displaystyle\sum_{k=1}^{9} k\frac{1}{9}\left(\frac{5}{9}\right)^9 = \frac{1}{9}\left(\frac{5}{9}\right)^9 \sum_{k=1}^{9} k = 5\left(\frac{5}{9}\right)^9$

La deuxième somme est égale à $E(X) = 4$.

On en déduit:

$$E(Y) = 5\left(\frac{5}{9}\right)^9 + 4$$

Exercice 4

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$. La fonction f est partout dérivable et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x - 1$.

f' est donc croissante, et, comme $f'(0) = 0$, f' est positive sur $\mathbb{R}^+$ et négative sur $\mathbb{R}^-$. Ce qui veut dire que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq f(0) = 0$. Ce qui prouve l'ingalité

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$$

En remplaçant x par $-x$, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}\ , e^{-x} \geq 1 - x$

Si $x \in]0,1[$ alors $1 - x > 0$. En prenant l'inverse des deux termes dans la dernière inégalité , on obtient

$$\forall x \in]0,1[, e^x \leq \frac{1}{1-x}$$

2. Pour tout réel $y > 1$, $\frac{1}{y} \in]0,1[$, donc $1 + \dfrac{1}{y} \leq e^{\frac{1}{y}} \leq \dfrac{1}{1-\frac{1}{y}}$ ou encore:

$$\frac{y+1}{y} \leq e^{\frac{1}{y}} \leq \frac{y}{y-1}$$

La croissance de la fonction ln montre que : $\ln \dfrac{y+1}{y} \leq \dfrac{1}{y} \leq \ln \dfrac{y}{y-1}$

3. Pour tout entier p, avec, $n \leq p \leq 2n$, on a : $\ln \dfrac{p+1}{p} \leq \dfrac{1}{p} \leq \ln \dfrac{p}{p-1}$

En additionnant membre à membre les inégalités obtenues en faisant varier p de n à $2n$, on obtient:

$$\ln \frac{2n+1}{n} \leq \sum_{p=n}^{2n} \frac{1}{p} \leq \ln \frac{2n}{n-1}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln \dfrac{2n+1}{n} = \ln 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln \dfrac{2n}{n-1} = \ln 2$, donc par encadrement:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$. On a $S_{2n} - S_n = u_n$.

Si la suite (S_n) converge vers une limite finie alors la suite extraite (S_{2n}) convergera aussi vers la même limite et donc u_n tendra vers 0. Ce qui est en contradiction avec le résultat de la question précédente. Ceci prouve la divergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.