## EXERCICE 1

**1.** La variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p = \frac{1}{2}$. Son espérance est $E(X) = np = \frac{n}{2}$ et sa variance $V(X) = np(1-p) = \frac{n}{4}$.

**2.**a) L'ensemble des valeurs de la variable aléatoire $Y$ est $\{0, ..., n\}$.

b) On a $P(Y=0) = P(X=0) = (\frac{1}{2})^n$.
Soit $k \in \{1, ..., n\}$ ; l'évènement $(Y = k)$ est réalisé quand n'ont été tirés que des jetons rouges lors des $n-1$ premiers tirages et un jeton bleu au $n$-ème tirage. Les tirages étant indépendants, on a
$P(Y=k) = (\frac{1}{2})^{n-1} \times \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^n$.

**3.** Les deux évènements $(X = 0)$ et $(Y = 1)$ sont incompatibles, donc $P((X=0)\cap(Y=1)) = 0$. Par contre, $P(X=0) \times P(Y=1) = (\frac{1}{2})^n \times \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^{n+1}$. Donc $P((X=0)\cap(Y=1)) \neq P(X=0) \times P(Y=1)$ et les évènements $(X=0)$ et $(Y=1)$ ne sont pas indépendants.

## EXERCICE 2

**1.** Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k \geqslant (n+1)(2^n-1)$.

La propriété est vraie au rang 1 car $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k2^k = 2$ et $2 \geqslant (1+1)(2^1-1)$.

Démontrons que pour tout entier $n \geqslant 1$, la propriété est vraie au rang $n+1$ dés qu'elle l'est au rang $n$.

$$\begin{aligned}
\text{On a : } \sum_{k=1}^{n+1} k2^k &= \sum_{k=1}^{n} k2^k + (n+1)2^{n+1} \\
&\geqslant (n+1)(2^n-1) + (n+1)2^{n+1} \quad \text{(Hypothèse de récurrence)} \\
&= (\frac{n+1}{2} + n+1)2^{n+1} - (n+1) \\
&= (\frac{n-1}{2} + (n+2))2^{n+1} - (n+1) \\
&\geqslant (n+2)2^{n+1} - (n+2) \text{ car } \tfrac{n-1}{2} \geqslant 0.
\end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang $n+1$, elle est donc vraie pour tout $n \geqslant 1$.

**2.** Soit un entier $n \geqslant 1$.

a) Pour $x \neq 1$, on a :
$$\begin{aligned}
(x-1)f(x) &= (x-1)\sum_{k=0}^{n} x^k \\
&= x\sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} x^k \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} x^k + x^{n+1} - (1 + \sum_{k=1}^{n} x^k) \\
&= x^{n+1} - 1.
\end{aligned}$$
On a bien pour $x \neq 1$, $f(x) = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

b) Soient $k \in \{0, ..., n\}$ et $u_k : x \longmapsto x^k$. D'une part pour $x > 1$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

D'autre part, à l'aide de a), $f'$ est la dérivée de $x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$ et donc pour $x > 1$,
$f'(x) = \dfrac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$.

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k = 2f'(2) = 2\frac{n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1}{(2-1)^2} = 2^{n+1}(2n - (n+1)) + 2$.

En conséquence, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$.

**3.** Reste à voir que $(n-1)2^{n+1} + 2 \geqslant (n+1)(2^n-1)$, soit $(n-1)2^{n+1} + 2 - (n+1)(2^n-1) \geqslant 0$ ou encore $(n-3)2^n + n + 3 \geqslant 0$. En remplaçant $n$ par 1 puis par 2, on vérifie que cette inégalité est vraie pour ces valeurs de $n$, étant clairement vraie pour $n \geqslant 3$, on retrouve bien le résultat de la première question.

## EXERCICE 3

**1.** On a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = 0$ et pour $n \geqslant 4$, $A^n = A^3 A^{n-3} = 0$.

**2.**a) Soient $x$ et $y$ réels.

On a : $\begin{aligned}[t] M(x)M(y) &= (I + xA + \tfrac{x^2}{2}A^2)(I + yA + \tfrac{y^2}{2}A^2) \\ &\underset{A^3=A^4=0}{=} I + yA + \tfrac{y^2}{2}A^2 + xA + \tfrac{x^2}{2}A^2 + xyA^2 \\ &= I + (x+y)A + (\tfrac{x^2}{2} + xy + \tfrac{y^2}{2})A^2 \\ &= I + (x+y)A + \tfrac{1}{2}(x+y)^2 A^2 \\ &= M(x+y) \\ &= M(y)M(x). \end{aligned}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par a), $M(x)M(-x) = M(-x)M(x) = M(x-x) = M(0) = I$. Donc la matrice $M(x)$ est inversible et son inverse est $M(-x)$.

**3.**a) Pour tout $f \in E$, il existe des réels $a, b, c$ uniques tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Donc la famille $\mathcal{B}_{\text{can}}$ constituée des fonctions de $E$ : $f_1 : x \longmapsto 1$, $f_2 : x \longmapsto x$ et $g_3 : x \longmapsto x^2$ est une base de $E$. La dimension de $E$ est alors égale à 3.

b) Comme $f_3 = \frac{1}{2}g_3$, la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est encore une famille libre et génératrice de $E$. C'est donc bien une base de $E$.

**4.**a) Soient $f$ et $g$ dans $E$, $\lambda$ et $\mu$ réels. On a :

$\begin{aligned}[t] \varphi(\lambda f + \mu g) &= \lambda f + \mu g + 4(\lambda f + \mu g)' + 8(\lambda f + \mu g)'' \\ &= \lambda f + \mu g + 4\lambda f' + 4\mu g' + 8\lambda f'' + 8\mu g'' \\ &= \lambda(f + 4f' + 8f'') + \mu(g + 4g' + 8g'') \\ &= \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g) \end{aligned}$

et l'application $\varphi$ est bien linéaire.

On a $\varphi(f_1) = 1 = f_1$. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(f_2)(x) = x + 4 = 4f_1(x) + f_2(x)$ et $\varphi(f_2) = 4f_1 + f_2$.

Et $\varphi(f_3)(x) = \frac{x^2}{2} + 4x + 8 = 8f_1(x) + 4f_2(x) + f_3(x)$ et $\varphi(f_3) = 8f_1 + 4f_2 + f_3$. Les fonctions $\varphi(f_1)$, $\varphi(f_2)$ et $\varphi(f_3)$ sont donc dans $E$. Comme $f$ est linéaire et $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $E$, l'application $\varphi$ est un endomorphisme de $E$.

b) Par les calculs faits en a), $\varphi(f_1) = 1 = f_1$, $\varphi(f_2) = 4f_1 + f_2$ et $\varphi(f_3) = 8f_1 + 4f_2 + f_3$. La matrice de $\varphi$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est égale à $I + 4A + \frac{4^2}{2}A^2$, soit à $M(4)$.

c) D'après 2.b), la matrice $M(4)$ est inversible, donc l'endomorphisme $\varphi$ est bijectif. Ainsi, pour tout $g \in E$, il existe un unique $f \in E$ tel que $\varphi(f) = g$.

**5.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = f_1 + 2f_2 + 2f_3$. La fonction $g$ est dans $E$ et d'après 4.c), il existe un unique $f \in E$ tel que $f + 4f' + 8f'' = g$.

Soient $(a, b, c)$ les coordonnées de $f$ dans la base $\mathcal{B}$. Comme les coordonnées de $g$ dans $\mathcal{B}$ sont $(1, 2, 2)$, on a $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (M(4))^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Mais d'après 2.b), $(M(4))^{-1} = M(-4)$ avec $M(-4) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le calcul de $M(-4) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ donne $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $f = 9f_1 - 6f_2 + 2f_3$ et la solution dans $E$ de l'équation $f + 4f' + 8f'' = g$ est la fonction $f : x \longmapsto 9 - 6x + 2\dfrac{x^2}{2}$, soit $f : x \longmapsto (x-3)^2$.