MATHÉMATIQUES

Programme, conseils, bibliographie

PUBLIC CONCERNÉ

Tout candidat bachelier ayant suivi deux années universitaires (Licence 2 Sciences, Licence 2 Économie...) ou de niveau équivalent (BTS, IUT, classes préparatoires Math Spé...).

NATURE DE L'ÉPREUVE

Première partie

L'épreuve de mathématiques du concours Passerelle 1 a pour but de tester la bonne assimilation du programme par les candidats, leur capacité de raisonnement et leur aptitude à rédiger et expliquer.

Deuxième partie

Le sujet est composé de trois exercices indépendants portant sur l'algèbre linéaire, l'analyse et les probabilités-statistiques, conçus, sans grande difficulté théorique, de telle sorte qu'un candidat sérieusement préparé soit en mesure d'aborder l'ensemble des questions.

PROGRAMME

A) Algèbre linéaire

a) Espaces vectoriels de dimension finie :
  - vecteurs de IRn : opérations internes et externes sur IRn (généralisation à partir de n = 2 et n = 3) ;
  - structure d'espace vectoriel ;
  - dépendance et indépendance linéaires ;
  - vecteurs générateurs ;
  - base d'un espace vectoriel : définition.

b) Matrices :
  - définition (tableau de nombres) ;
  - addition, multiplication par un scalaire, multiplication de deux matrices ;
  - calcul de l'inverse d'une matrice carrée et application à l'équation matricielle AX = B.

c) Applications linéaires en dimension finie :
  - rang d'une application linéaire, formule reliant le rang, la dimension du noyau et celle de l'espace de départ ;
  - image par une application linéaire d'une famille liée, d'une famille génératrice, d'un sous-espace vectoriel de l'espace de départ.

B) Analyse

a) Suites

b) Fonctions numériques :
  - fonctions logarithme népérien, exponentielles et puissances ;

- limites, asymptotes ;
- dérivation ;
- primitives d'une fonction continue sur un intervalle ;
- maxima et minima d'une fonction ;
- représentation graphique.

c) Calcul intégral :
- intégrale d'une fonction continue sur un segment ;
- propriétés de l'intégrale ;
- intégration par parties.

C) Statistiques et probabilités

a) Définition d'une probabilité et propriétés ;
b) Événements indépendants et dépendants relativement à une probabilité ;
c) Variable aléatoire (ou aléa numérique) prenant un nombre fini de valeurs réelles ;
d) Distribution (ou loi) de probabilité ;
e) Fonction de répartition ;
f) Espérance mathématique, variance, écart type ;
g) Distributions usuelles de probabilité ;
h) Distribution de Bernouilli, binomiale ;
i) Distribution de Poisson : approximation de la distribution binomiale par la loi de Poisson ;
j) Distribution normale.

CONSEILS DE PRÉPARATION

Après avoir bien lu le programme, le candidat doit noter les points inconnus ou trop flous.

Il doit avant tout revoir le cours pour consolider ou apprendre les différentes notions définies dans le programme, ainsi que les résultats (théorèmes et leurs corollaires...) qui en découlent. À chaque notion acquise, le candidat doit tester son degré d'assimilation en faisant de petits exercices.

Les différentes notions du programme étant acquises, le candidat doit faire beaucoup d'exercices et d'annales (en particulier du concours Passerelle 1) sans surtout se précipiter sur la correction.

BIBLIOGRAPHIE

- Jean-Marie Monier, *Cours et Exercices*, collection « J'intègre », éd. Dunod.
- Simon et Blume, *Mathématiques pour économistes*, éd. Économica.
- *Recueil d'exercices et résumés de cours*, coll. « Flash U », éd. Armand Collin.
- Tout livre d'analyse et d'algèbre linéaire de 1er cycle universitaire (1re année).

MATHÉMATIQUES

Ce cas a été rédigé par l'ESC Grenoble.
Durée : 2 heures.

CONSIGNES

Aucun document n'est autorisé. Calculatrices interdites.

Barème : 4 pts pour l'exercice 1; 9 pts pour l'exercice 2 et 7 pts pour l'exercice 3.

SUJET

EXERCICE 1

Soit l'intégrale $I = \int_1^4 \frac{\ln \frac{x}{2}}{4+x^2} dx$.

1. Transformer I à l'aide du changement de variable $t = \frac{4}{x}$.

2. En déduire la valeur de I.

EXERCICE 2

Soit f_1, f_2 et f_3 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = e^{-x}$, $f_2(x) = xe^{-x}$ et $f_3(x) = x^2e^{-x}$. On considère l'ensemble F des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme: $x \mapsto (a + bx + cx^2)e^{-x}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de F.

2. On considère l'application ϕ, qui à tout élément f de F associe sa fonction dérivée : $\phi(f) = f'$. Montrer que l'application ϕ est un endomorphisme de F et que sa matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Vérifier que A est inversible et calculer A^{-1}, l'inverse de A.

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (3 - 2x + 8x^2)e^{-x}$. Expliquer comment utiliser ϕ pour trouver une primitive de g dans F. Calculer une telle primitive.

5. On pose $B = A + I_3$ où I_3 désigne la matrice identité de $\mathbb{R}^3$.

a) Calculer B^2 et B^3.

b) Montrer pour tout entier $n \geq 1$, $A^n = (-1)^n(I_3 - nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2)$.

6. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée n-ième de la fonction g définie au **4**.

EXERCICE 3

On considère deux pièces A et B; A donne Pile avec la probabilité $\frac{1}{4}$, et B donne Pile avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

On choisit une pièce au hasard et on la lance; si l'on obtient Pile, on relance la même pièce, sinon on lance l'autre pièce. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit p_n la probabilité de lancer la pièce A au n-ième lancer.

1. En appliquant la formule des probabilités totales, montrer que $p_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}p_n$.

2. En déduire que $p_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{10}(-\frac{1}{4})^{n-1}$.

3. Déterminer la limite de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini.

4. Déterminer la probabilité d'obtenir Pile au n-ième lancer.