2019

CORRIGÉ

Mathématiques

CONCOURS ECRICOME PREPA

VOIE ECONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE TECHNOLOGIQUE

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

- Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

ÉVALUATION

- Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CORRIGÉ

EXERCICE 1

Partie A

1. • $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur colonne non nul, et on a : $AU = U$, donc :

$\boxed{U \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } 1.}$

• De même le vecteur $V = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nul et vérifie $AV = 2V$, donc :

$\boxed{V \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } 2.}$

• Enfin le vecteur $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nul et vérifie $AW = 3W$, donc

$\boxed{W \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } 3.}$

2. On obtient $\boxed{P^2 = I_3}$. Ainsi, $\boxed{\text{la matrice } P \text{ est inversible et on a : } P^{-1} = P.}$

3. (a) La matrice P donnée est la matrice dont les vecteurs colonnes sont dans cet ordre les vecteurs propres U, V et W trouvés précédemment.
Donc la matrice diagonale D telle que $D = P^{-1}AP$ est la matrice dont les termes diagonaux sont respectivement les valeurs propres 1,2,3, soit $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$.

(b) Montrons par récurrence que pour tout nombre entier naturel n : $A^n = PD^nP$:

- Pour $n = 0$: $PD^0P = PIP^{-1} = I$ (car $P^{-1} = P$)
et $A^0 = I$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$
- Soit $n \geqslant 0$. On suppose que $A^n = PD^nP$.
On a montré que $D = P^{-1}AP$ donc en multipliant par P à gauche et par P^{-1} à droite dans chaque membre, on obtient :
$A = PDP^{-1} = P^{-1}DP$ puisque $P^{-1} = P$
d'où $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP \times P^{-1}DP$, soit $A^{n+1} = PD^{n+1}P$
- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ A^n = PD^nP}$

(c) La matrice D est diagonale donc D^n aussi et pour tout naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

donc $PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2^n & 0 \\ 1 & 2^n & 3^n \end{pmatrix}$

et $A^n = PD^nP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2^n & 0 \\ 1 & 2^n & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^{n+1}-2 & 2^n & 0 \\ 3^n - 2^{n+1} + 1 & 3^n - 2^n & 3^n \end{pmatrix}}$

Partie B

1. (a) Le premier client choisit exactement une formule, donc $a_1 = 1$ et $b_1 = c_1 = 0$.

(b) Après réception du $2^{ième}$ bon, il ne peut y avoir plus de deux formules choisies. Donc $c_2 = 0$.
a_2 est la probabilité qu'il n'y ait qu'une formule choisie. Cette probabilité est égale à la probabilité que le deuxième client ait choisi la même formule que le premier. Donc $a_2 = \dfrac{1}{3}$.

Puisque, $a_2 + b_2 + c_2 = 1$, on a alors $b_2 = \dfrac{2}{3}$.

(c)
- Si, après réception du $k^{ième}$ bon l'événement A_k est réalisé, c'est-à-dire si une seule formule a été choisie, alors après réception du bon suivant :
  - ⋆ l'événement A_{k+1} est réalisé si ce client a choisi la même formule que les k précédents donc $P_{A_k}(A_{k+1}) = \dfrac{1}{3}$
  - ⋆ l'événement B_{k+1} est réalisé si ce client a choisi l'une des 2 autres formules restantes donc $P_{A_k}(B_{k+1}) = \dfrac{2}{3}$,
  - ⋆ puisque chaque client choisit une seule formule $P_{A_k}(C_{k+1}) = 0$
- Si, après réception du $k^{ième}$ bon l'événement B_k est réalisé, c'est-à-dire si deux formules ont été choisies, alors, après réception du bon suivant :
  - ⋆ l'événement A_{k+1} ne peut pas être réalisé donc $P_{B_k}(A_{k+1}) = 0$.
  - ⋆ l'événement B_{k+1} est aussi réalisé si le $(k+1)^{ième}$ client choisit l'une des deux formules déjà choisies donc $P_{B_k}(B_{k+1}) = \dfrac{2}{3}$,
  - ⋆ l'événement C_{k+1} est réalisé si c'est la dernière formule qui est choisie donc $P_{B_k}(C_{k+1}) = \dfrac{1}{3}$
- Si, après réception du $k^{ième}$ bon, l'événement C_k est réalisé, c'est-à-dire si les trois formules ont été choisies, alors, après la réception du $(k+1)^{ième}$ bulletin, les trois formules restent choisies, donc : $P_{C_k}(A_{k+1}) = 0, \quad P_{C_k}(B_{k+1}) = 0, \quad P_{C_k}(C_{k+1}) = 1$

2. (a) Pour chaque valeur de l'entier k, les événements $A_k,\ B_k,\ C_k$ forment un système complet d'événements. La formule des probabilités totales permet alors d'écrire les trois égalités :

$$\begin{cases} P(A_{k+1}) = P_{A_k}(A_{k+1})\,P(A_k) + P_{B_k}(A_{k+1})\,P(B_k) + P_{C_k}(A_{k+1})\,P(C_k) \\ P(B_{k+1}) = P_{A_k}(B_{k+1})\,P(A_k) + P_{B_k}(B_{k+1})\,P(B_k) + P_{C_k}(A_{k+1})\,P(C_k) \\ P(C_{k+1}) = P_{A_k}(C_{k+1})\,P(A_k) + P_{B_k}(C_{k+1})\,P(B_k) + P_{C_k}(C_{k+1})\,P(C_k) \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} a_{k+1} = \dfrac{1}{3}a_k \\ b_{k+1} = \dfrac{2}{3}a_k + \dfrac{2}{3}b_k \\ c_{k+1} = \dfrac{1}{3}b_k + c_k \end{cases}$$

Ces trois égalités sont équivalentes à l'unique égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \boxed{M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}A}$$

(b) On montre par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$.

- La formule est vraie pour $n = 1$: $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M^0 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, avec la convention $M^0 = I$.
- Soit $n \geqslant 1$. On suppose que $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$.

  On sait que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = MM^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$
- Conclusion : la formule est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

3. (a) On sait que $M = \dfrac{1}{3}A$, donc $M^{n-1} = \dfrac{1}{3^{n-1}}A^{n-1}$. On a donc :

$$M^{n-1} = \frac{1}{3^{n-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^n - 2 & 2^{n-1} & 0 \\ 3^{n-1} - 2^n + 1 & 3^{n-1} - 2^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

Comme $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on en déduit :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3^{n-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2^n - 2 \\ 3^{n-1} - 2^n + 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où : } \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{3^{n-1}} \\ b_n = \dfrac{2^n - 2}{3^{n-1}} \\ c_n = \dfrac{3^{n-1} - 2^n + 1}{3^{n-1}} = 1 - \dfrac{2^n - 1}{3^{n-1}} \end{cases}$$

(b) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^{n-1} = +\infty$, d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0}$.

De plus, $b_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} - \dfrac{2}{3^{n-1}}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{3^{n-1}} = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0}$.

On trouve enfin que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 1.}$

Ce résultat était hautement prévisible, il signifie que si le nombre de clients est élevé, il est très probable que toutes les formules seront choisies.

(c) On observe que l'on calcule le contenu de la variable `c` avec la formule définissant c_n en fonction de n pour tout entier n strictement positif.

Ainsi, ce code semble calculer le rang du premier terme de la suite (c_n) supérieur ou égal à 0,95. Ce rang est donc le plus petit nombre de clients tel que la probabilité que les trois formules soient choisies vaut au moins 0,95.

On peut donc affirmer qu'à partir de 11 clients, on est sûr à 95% que toutes les formules seront choisies.

EXERCICE 2

1. (a) $\lim\limits_{x\to 0} (2x-1) = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \lim\limits_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty$, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty}$

La courbe admet donc une $\boxed{\text{asymptote verticale d'équation } x = 0.}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \lim\limits_{X\to 1} \ln(X) = 0$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-1) = +\infty$, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$

2. g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $x > 0$,

$$g'(x) = 2 + \frac{\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\dfrac{x}{x+1}} = 2 + \frac{1}{x(x+1)}$$

Pour tout $x > 0$, on a $g'(x) > 0$ comme somme de de deux nombres strictement positifs.

Donc $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{+*}.}$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)-(2x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=0$

Ainsi $\boxed{\text{la courbe } (C) \text{ admet pour asymptote oblique la droite } (D) \text{ d'équation } y=2x-1}$.

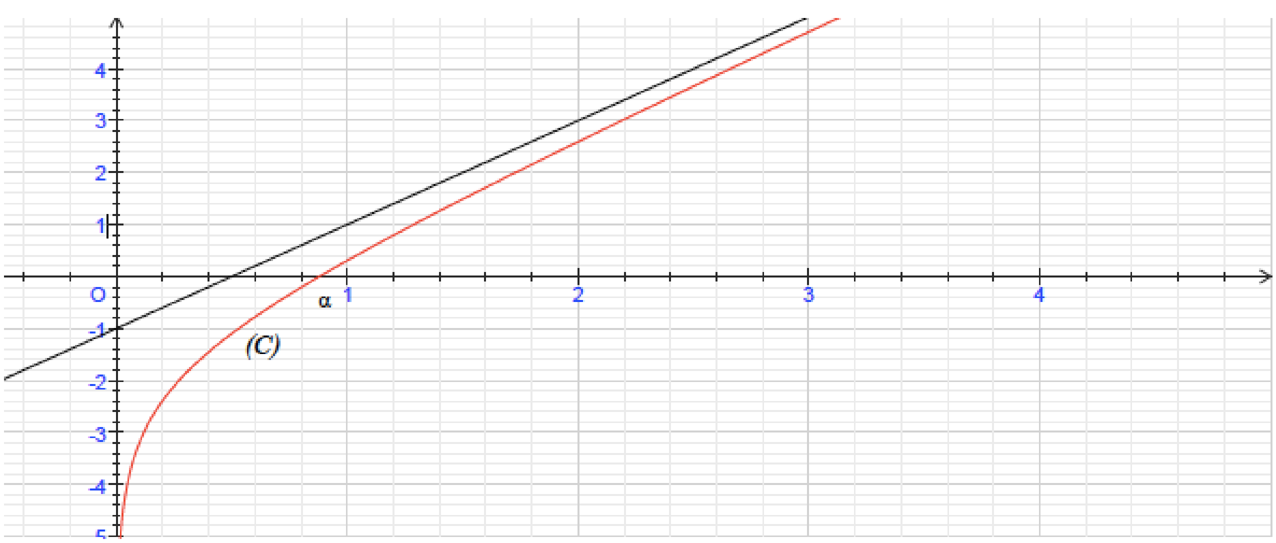
(b) Pour tout $x>0$, $\dfrac{x}{x+1}<1$ donc $\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)<0$, donc $\boxed{(C) \text{ est toujours en dessous de } (D) \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}}$.

4. (a) La fonction g est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}^{+*}$ et strictement croissante. De plus $g(\mathbb{R}^{+*})=\mathbb{R}$. Comme $0\in\mathbb{R}$, d'après le théorème de bijection, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

(b)

```
function y=g(x)
        y=2*x-1+log(x/(x+1))
endfunction
a = input('Entrer la valeur de a : ')
b = input('Entrer la valeur de b : ')
while b - a > 0.01
        m =(a+b)/2
        if g(a)*g(m) <= 0  then
                b = m
        else
                a = m
        end
end
disp(m)
```

5.



6. (a) Pour tout $x > 1$, $2x - 1 - g(x) = -\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$, on pose $\left| \begin{array}{l} u(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \\ v'(x) = -1 \end{array} \right.$ et $\left| \begin{array}{l} u'(x) = \frac{1}{x(x+1)}, \\ v(x) = -x \end{array} \right.$

Les fonctions u' et v' sont continues sur $]1, +\infty[$ donc d'après le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I = \int_1^2 [2x - 1 - g(x)]\,\mathrm{d}x &= \left[-x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{-x}{x(x+1)}\mathrm{d}x \\ &= -2\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \int_1^2 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x \\ &= -2\ln(2) + 2\ln(3) - \ln(2) + \Big[\ln|x+1|\Big]_1^2 = \boxed{3\ln(3) - 4\ln(2)} \end{aligned}$$

(b) L'aire délimitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$ vaut, en unités d'aire, $3\ln(3) - 4\ln(2)$.

7. (a) Le vecteur `u` contient les 50 premiers termes de la suite (u_n) dans l'ordre.
Ainsi, l'instruction `S = cumsum(u)` crée un vecteur contenant les sommes cumulées des composantes de `u` : le vecteur `S` contient les valeurs u_1, $u_1 + u_2$, $\sum\limits_{k=1}^{3} u_k$, $\ldots$, $\sum\limits_{k=1}^{50} u_k$, c'est á dire les nombres $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ pour n un entier naturel compris entre 1 et 50.
L'instruction `plot(1:50,S,'+')` construit alors un nuage de points représentant ces sommes partielles en fonction de n.
On constate que les points du nuage sont proches des points de la courbe représentative de la fonction ln. Or $\lim\limits_{+\infty} \ln = +\infty$ donc $\boxed{\text{il semble que la série } \sum u_n \text{ soit divergente}}$.

(b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \geqslant 1$, $u_n = (2n-1) - g(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$, et :

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N} \ln(n+1) - \sum_{n=1}^{N} \ln(n) = \ln(N+1)$$

Comme $\lim\limits_{N\to+\infty} (\ln(N+1)) = +\infty$, $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ est divergente}}$

EXERCICE 3

1. (a) On a : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 1$

   Ainsi, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ donc f n'est pas continue au point d'abscisse 2.

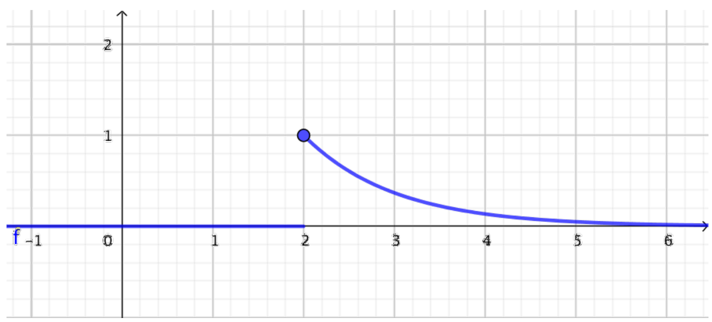
   Ainsi, $\boxed{f \text{ n'est pas continue sur } \mathbb{R}}$.

   (b) La fonction f n'est pas continue en 2 donc $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en 2.}}$

   (c) $\forall x \in]2;+\infty[$, $f'(x) = -e^{2-x} < 0$, donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [2;+\infty[}$

   (d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2-x} = 0$ donc $\boxed{\text{l'axe des abscisses est asymptote horizontale à } C_f \text{ en } +\infty.}$

   (e)



2. (a) Pour $B > a$, $\displaystyle\int_a^B f(x)\,dx = \int_a^B e^{a-x}dx = \left[-e^{a-x}\right]_a^B = 1 - e^{a-B}$

   Or, $\lim\limits_{B\to+\infty} e^{a-B} = \lim\limits_{A\to-\infty} e^{A} = 0$, donc $\lim\limits_{B\to+\infty} \left(1 - e^{a-B}\right) = 1$

   Donc $\boxed{\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge et vaut 1.}}$

   (b)
   - f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$
   - f est continue sur $]-\infty, a[$ en tant que fonction constante nulle, f est continue sur $]a, +\infty[$ comme composée de fonctions de référence continues.
     De plus, $\lim\limits_{x\to a^{--}} f(x) = \lim\limits_{x\to a} 0 = 0$ et $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a) = 1$
     Ainsi, f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
   - f étant nulle sur $]-\infty, a[$, $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ converge et vaut 0.

     De plus, d'après la question précédente, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut 1

     On en déduit, par la relation de Chasles, que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut 1

   $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc bien une densité de probabilité.}}$

3. (a) $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ F_X\ (x) = \displaystyle\int_{\infty}^{x} f\,(t)\,dt$

- Si $x < a$, $\ F_X\ (x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$
- Si $x \geqslant a$, $\ F_X\ (x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{x} e^{a-t}dt = \left[-e^{a-t}\right]_a^x = 1 - e^{a-x}$

(b) $F_X\,(x) = \dfrac{1}{2} \iff \begin{cases} x \geqslant a \\ 1 - e^{a-x} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqslant a \\ e^{a-x} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqslant a \\ a - x = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$

L'équation $F_X\,(x) = \dfrac{1}{2}$ admet pour unique solution $\boxed{x = a + \ln(2)}$

(c) $P_{(X>a+1)}\,(X > a+2) = \dfrac{P\,((X > a+1) \cap (X > a+2))}{P\,(X > a+1)} = \dfrac{P\,(X > a+2)}{P\,(X > a+1)}$

d'où $\quad P_{(X>a+1)}\,(X > a+2) = \dfrac{1 - F\,(a+2)}{1 - F\,(a+1)} = \dfrac{e^{-2}}{e^{-1}} = \boxed{\dfrac{1}{e}}$

4. (a) $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ F_Y\ (x) = P\,(X - a \leqslant x) = P\,(X \leqslant a + x) = F_X\ (x + a)$

donc $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ F_Y\ (x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x + a < a \\ 1 - e^{a-(x+a)} & \text{si } x + a \geqslant a \end{cases} \boxed{= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$

(b) On en déduit que Y est une variable à densité qui suit la $\boxed{\text{loi exponentielle de paramètre } 1}$.

(c) D'après (b), $E\,(Y) = \dfrac{1}{1} = 1$ et $V\,(Y) = \dfrac{1}{1^2} = 1$
On en déduit, par linéarité de l'espérance, $E\,(X) = E\,(Y + a) = E\,(Y) + a = 1 + a$
et $V\,(X) = V\,(Y + a) = V\,(Y) = 1$

5. (a) $E(S_n) = E\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k - 1)\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(E(X_k) - 1)$ par linéarité de l'espérance

et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont de même loi que X

donc $E(S_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(1 + a - 1) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a = \dfrac{1}{n} \times na = a$

donc $\boxed{S_n \text{ est un estimateur sans biais de } a}$

(b) $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes

donc $V(S_n) = V\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k - 1)\right) = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} V(X_k)$

donc $V(S_n) = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$

On en déduit que le risque quadratique $r\,(S_n)$ vaut : $r\,(S_n) = V\,(S_n) + 0^2$

soit $r\,(S_n) = V\,(S_n) = \dfrac{1}{n}$ et $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} r\,(S_n) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0.}$

(c) Vu l'instruction `X = Y + a`, le vecteur `Y` doit contenir 50 réalisations de la variable aléatoire Y de loi exponentielle de paramètre 1, conformément à la question **3.b)**. Ce faisant, l'espérance de Y est 1 et on peut créer ce vecteur en écrivant : `Y = grand(1,50,'exp',1)`. Enfin, pour calculer S_n connaissant le vecteur `X`, il suffit de calculer la moyenne des composantes du vecteur `X-1`. On en déduit le programme ci-dessous.

```
a = 1
Y = grand(1,50,'exp',1)
X = Y + a
S = mean(X-1)
```

RAPPORT D'ÉPREUVE

Commentaires généraux

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée. En particulier un respect de la numérotation des questions de l'énoncé est attendu ; ainsi toute question abordée doit être précédée du numéro complet de cette dernière.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un pré-requis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné. Un manque de dextérité dans les calculs est constaté. Il est conseillé de s'entrainer très régulièrement à faire des calculs;

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que, très peu de candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Avec une moyenne de 11,66 et un écart-type de 6,13, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Commentaires particuliers

Exercice 1

Cet exercice de calcul matriciel était de forme classique sur ses premières questions, utilisant des notions rassurantes que les candidats sont habitués à traiter dans les sujets étudiés pendant l'année. La deuxième partie de l'exercice, mettait en jeu un système évolutif de réservations de formules de repas par des clients, et permettait de vérifier les aptitudes des candidats sur la manipulations des événements et des probabilités. Les calculs étaient volontairement aisés, ce qui a permis aux candidats de bien avancer sans être bloqués.

Partie A

1. Question bien réussie pour la plupart des candidats. Cependant, trop peu d'entre eux énoncent clairement que les vecteurs propres doivent être non nuls, ce qui est attendu explicitement par les correcteurs.
2. On recense encore quelques candidats qui, après avoir calculé P^2 se lancent dans la méthode du pivot de Gauss pour inverser la matrice P.

3. (a) Ici, on attend plutôt des candidats qu'ils calculent simplement le produit matriciel donnant la matrice D pour constater qu'elle est diagonale, plutôt que des réponses basées sur un cours hors programme en ECT (conditions de diagonalisation).
   (b) Le raisonnement par récurrence est connu, mais l'initialisation est souvent mal rédigée (on voit souvent ici $0 = 0$, ce qui ne consiste pas en une bonne initialisation dans le cas présent.). Certains candidats maladroits écrivent « pour tout n »dans la phrase de leur hérédité.
   (c) Très peu de candidats précisent que D est diagonale pour justifier le calcul de D^n. C'est pourtant une attente explicite des correcteurs chaque année. Il est dommage que des candidats ayant obtenu la bonne matrice D^n peinent dans le produit matriciel, et ne parviennent pas à corriger leurs calculs, ceci malgré le résultat final donné dans l'énoncé.

Partie B

(a) Souvent bien traité. Quelques rares candidats ont été induit en erreur par l'énoncé sous forme de tableau. Seule la détermination des probabilités conditionnelles reste souvent erronée car mal comprise par les candidats qui les confondent avec les probabilités d'intersection.

4. La formule des probabilités totales reste encore mal connue (voire inconnue) pour de nombreux candidats. Le raisonnement par récurrence, non indiqué par l'énoncé ici, a été rarement fait d'emblée.
5. (a) Le calcul de puissances a posé de nombreux problèmes. On voit souvent apparaître par exemple que $-2^n = (-2)^n$. Certains candidats ne tiennent pas compte du facteur $(1/3)^n$ dans le calcul de M^n pour au final, comme par magie, le faire apparaître dans le résultat final afin de se conformer à l'énoncé.
   (b) Le calcul des limites est souvent confus, et donne lieu à des résultats fantaisistes, surtout pour des probabilités !
   (c) Pour cet algorithme de seuil, le programme est souvent traité, mais est malheureusement pour la plupart du temps interprété incorrectement. La référence à la « probabilité »dans l'interprétation du script est presque systématiquement omise.

Exercice 2

Cet exercice d'analyse proposait l'étude complète d'une fonction, le tracé de sa courbe représentative, un calcul d'aire, ainsi qu'une application à l'étude d'une suite et d'une série. La première partie constitue un exercice classique, qui devrait être un objectif à atteindre pour tout candidat sérieux de la filière technologique. L'exercice a en général été malmené par les candidats, qui manquaient de rigueur et ont succombé aux moindres techniques calculatoires attendues au long de la résolution de l'exercice.

1. (a) Les calculs élémentaires de limites ne sont pas maîtrisés par tous. La formule magique « par croissances comparées » n'est pas un remède miracle qui soigne toutes les limites difficiles.
   Le nombre de candidats confondant les asymptotes horizontales et verticales est loin d'être négligeable. On voit apparaître $\ln(0)$ ou $+\infty$ dans les calculs de quelques rares copies.
   (b) Seule une minorité de copies présente des calculs de limites soignés faisant notamment référence clairement au résultat du cours et à la notion de composition.
2. Cette question est assez discriminante. De nature plus technique, elle a posé grand nombre de problèmes aux candidats , qui ont souvent tout fait parfaitement ou alors presque rien. L'essentiel de la question

résidait dans le calcul de la dérivée, mais malheureusement l'utilisation de la dérivée de $\ln(u)$ était parfois défaillante. Parmi les bonnes copies, on retrouve à parts égales la méthode de décomposition du ln en somme, comme l'utilisation de la dérivation directe de $\ln(u)$.

3. (a) Un très grand nombre de candidats applique la méthode générale, à savoir étudier $\dfrac{g(x)}{x}$, puis $g(x)-2x$, alors que la partie affine de $g(x)$ donne directement le résultat. Les candidats doivent faire preuve d'un minimum de recul dans ce genre de question pour avoir une meilleure intuition de la méthode à adopter.

   (b) La position relative est souvent mal faite, et nombre de candidats qui établissent le lien avec $\dfrac{x}{x+1}$ se trompent sur sa position par rapport à 1. L'étude de la position a parfois donné lieu à des réponses faisant référence à la convexité de la fonction g. Cette méthode n'est bien entendu pas acceptée compte tenu du peu d'arguments fournis et du lien sûrement hors programme en ECT entre convexité et position de la courbe par rapport à son asymptote.

4. (a) Dans l'ensemble, les élèves utilisent correctement le théorème de la bijection en en citant les bonnes hypothèses. Les élèves confondant le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la bijection ne sont pas pénalisés. Cependant, l'appartenance de 0 à l'intervalle image est souvent oubliée, et est nécessaire pour obtenir les points.

   (b) L'algorithme de dichotomie semble inconnu des élèves. Seuls quelques rares candidats le font correctement, quasiment tous les autres remplissent uniquement la ligne de la définition de la fonction. C'est pourtant un attendu classique du programme, vu en première année, revu souvent en deuxième année, qui doit être travaillé. Le format de la question avec un programme incomplet était tout à fait bien approprié. Ce type de question sera à nouveau posé dans les années à venir. De nombreux points sont à gagner facilement avec une telle question.

5. Les tracés de graphiques ont été souvent mal traités, quand ils n'étaient pas totalement absents. Les courbes sont mal tracées, ou alors de manière très peu appliquée. Il serait bon que les asymptotes à l'inverse ressemblent à des droites et non des courbes. De manière générale, nous accorderons dans les années futures un grand nombre de points au soin des tracés demandés de manière à valoriser les candidats qui prennent le temps de tracer proprement les représentations graphiques demandées.

6. (a) Lors de l'appel d'une intégration par parties, il était attendu des élèves (et ce sera désormais le cas pour les futures sessions) qu'ils indiquent les quatre fonctions u, u', v et v' qu'ils utilisent, sans préciser plus d'hypothèses (le caractère C^1 est hors programme en ECT). Les candidats peuvent ensuite appliquer directement l'intégration par parties, sans avoir besoin de rappeler la formule du cours.

   L'intégration par parties a dans l'ensemble été bien réalisée. La possibilité laissée aux candidats de déduire le résultat final de la formule intermédiaire énoncée a permis à certains autres candidats d'obtenir quelques points sans avoir véritablement maîtrisé le calcul d'intégrale.

   (b) Il a été rare de lire une interprétation correcte en terme d'aire du résultat précédent.

7. La question est très peu souvent abordée, mais quand c'est bien le cas, c'est bien fait par les candidats, avec une justification correcte et soignée de la divergence de la suite (S_n) via l'observation de la somme partielle télescopique.

Exercice 3

Cet exercice testait les candidats sur les probabilités continues vues en première et deuxième année, ainsi que sur ses applications en estimation ponctuelle, avec l'étude du biais et du risque quadratique d'un estimateur construit à partir de la moyenne empirique d'un échantillon. Par sa place en troisième position, il a été moins abordé que les deux autres exercices, sûrement faute de temps par les candidats. Mais il y avait beaucoup de points à obtenir, les candidats étant souvent à l'aise avec les variables aléatoires à densité qu'ils ont beaucoup manipulé en fin de deuxième année.

Partie A

1. (a) Peu de candidats savent étudier la continuité en un point.

   (b) Comme à la question précédente, les candidats ne semblent pas savoir qu'une fonction non continue n'est pas dérivable. Le nombre de candidats ayant proposé une fonction non continue mais dérivable est impressionnant.

   (c) Les variations ont été faites correctement en général.
   Cependant, beaucoup de candidats considèrent que $f(x) = e^{2-x}$ sans e soucier du domaine de validité de cette définition.

   (d) L'étude de la limite également a été bien fait en général.

   (e) Les candidats ne voient en général pas le rapport entre une densité et sa représentation graphique. La mauvaise lecture (incomplète) de la fonction f est souvent retrouvée ici, puisque trop de candidats ne distinguent pas $f(x)$ avant et après la valeur 2, et donc ne représentent qu'une courbe associée à la fonction $x \mapsto e^{2-x}$.

2. (a) Les candidats abordant cette question le font souvent assez bien. Ce type de raisonnement met directement en lumière les différences flagrantes de niveaux de rédaction d'un candidat à l'autre. Très souvent, la notion d'intégrale généralisée comme limite est assimilée, seul un petit nombre de candidats confond la limite avec l'intégrale partielle. Il est regrettable enfin que quelques candidats ne comprennent pas qu'on revient au cas général du paramètre a quelconque. Cela a évidemment rajouté de la confusion aux calculs.

   (b) La définition d'une densité de probabilité est bien connue par les candidats, mais la compréhension est peu convaincante. On peut regretter que nombre de candidats justifient correctement une discontinuité qu'ils n'ont parfois même pas vu à la question 1(a).

3. (a) Cette question est bien traitée, mais avec la réponse donnée par l'énoncé, on voit apparaître de nombreuses tentatives de bluff. Il est à rappeler que les examinateurs ne tolèrent pas ce genre d'initiative qui jettera immédiatement un a priori négatif du correcteur sur le reste de la copie du candidat. On attend ici une définition claire de la fonction de répartition.

   (b) La médiane a été difficilement déterminée par les candidats.

   (c) Le calcul de la probabilité conditionnelle est rarement bien mené, notamment mettant en cause le manque de maîtrise des candidats vis à vis du formalisme probabiliste (intersection de probabilités, ...) et du lien avec la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

4. (a) La méthode de transfert a été plutôt bien réalisée dans beaucoup de copies, preuve que les candidats ont travaillé ce genre d'exercices pendant l'année.

(b) Beaucoup pensent reconnaître une loi exponentielle en trouvant une densité qui a une discontinuité en dehors de 0.

(c) Souvent les espérances et variances de Y ont été données correctement, mais peu ont su alors en déduire celles de X.

5. (a) La notion de biais d'estimateur apparaît relativement bien maîtrisée pour une bonne partie des candidats ayant abordé la question. Évidemment, certaines copies présentent un calcul du biais convenable utilisant la valeur $E(X) = 1 + a$, alors même que ce résultat n'a pas correctement été obtenu à la question 4(c).

(b) Même remarque que pour le biais. L'indépendance des variables aléatoires pour la variance est souvent oubliée, alors même qu'elle avait été parfois citée sans raison dans le calcul de l'espérance. Certains candidats ne connaissent pas précisément le lien entre risque quadratique et biais. Par chance, ce dernier était nul ici, le résultat alors obtenu reste correct.

(c) A part la première ligne, les candidats n'ont pas trop su quoi inscrire dans la fin de ce script, ce qui est dommage compte tenu du niveau de difficulté de la question.