2018

CORRIGÉ

MATHEMATIQUES

CONCOURS ECRICOME PREPA

VOIE ECONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE ECONOMIQUE

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

- Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

ÉVALUATION

- Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CORRIGÉ

EXERCICE 1

Partie I

1. (a) $A^2 - 7A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 14 \\ 0 & 9 & 0 \\ 7 & -7 & 23 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = -12I_3$. On a donc : $\boxed{A^2 - 7A = -12I_3}$

   (b) D'après ce qui précède, le polynôme : $P(X) = X^2 - 7X + 12 = (X-3)(X-4)$ est un polynôme annulateur de A. Ainsi, les valeurs susceptibles d'être valeur propre de A sont les racines de P, c'est-à-dire 3 et 4.

   Donc $\boxed{Sp(A) \subset \{3, 4\}}$.

   (c) Pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$AX = 3X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - y + 2z = 0 \Leftrightarrow x = y - 2z.$$

   Cette équation admet des solutions non nulles, donc 3 est bien valeur propre de A, et

$$E_3(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

   La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $E_3(A)$ et est composée de deux vecteurs non colinéaires, cette famille est donc une base de $E_3(A)$.

   Remarquons alors que $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0$, donc 4 est aussi valeur propre de A. De plus, $\dim E_3(A) = 2$, donc nécessairement : $\dim E_4(A) \leqslant 1$ et finalement : $\dim E_4(A) = 1$.

   Ainsi, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_4(A)$.

$$\boxed{Sp(A) = \{3, 4\},\ E_3(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ et } E_4(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right).}$$

   (d) 0 n'est pas valeur propre de A, donc $\boxed{\text{la matrice } A \text{ n'est pas inversible.}}$

   $\dim E_3(A) + \dim E_4(A) = 2 + 1 = 3 = \dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, donc $\boxed{\text{la matrice } A \text{ est diagonalisable.}}$

2. (a) Pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$f(u) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -3x + 3y - 3z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\text{Ker}(f) = Vect\left((1, 1, 0)\right) \neq \{(0, 0, 0)\}$, donc :

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } f \text{, et } E_0(f) = \text{Ker} f = Vect\left((1, 1, 0)\right)}$$

(b) $rg\left(B - 2I_3\right) = rg\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = 2$

(c) $B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{f(e_1 - e_2 - e_3) = 3(e_1 - e_2 - e_3).}$

(d) La question 2a) nous indique que 0 est valeur propre de f, la question 2b) que 2 est valeur propre de f et la question 2c) que 3 est valeur propre de f. Et l'endomorphisme f, étant un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, ne peut admettre d'autre valeur propre : $Sp(f) = \{0, 2, 3\}$. Ainsi, f a trois valeurs propres distinctes, donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$

3. Posons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarquons alors que $BX_1 = 3X_1$, $BX_2 = 0$ et $BX_3 = 2X_3$. Ainsi, la famille (X_1, X_2, X_3) est une

famille de trois vecteurs propres de B associés à trois valeurs propres distinctes, donc cette famille est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de vecteurs propres de B. Donc d'après la formule de changement de base, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a: $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

De même, en remarquant que : $AX_1 = 3X_1$, $AX_2 = 3X_2$ et $AX_3 = 4X_3$, on obtient :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Partie II

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+2} = P^{-1}X_{n+2} = \dfrac{1}{6}P^{-1}AX_{n+1} + \dfrac{1}{6}P^{-1}BX_n = \dfrac{1}{6}(P^{-1}AP)P^{-1}X_{n+1} + \dfrac{1}{6}(P^{-1}BP)P^{-1}X_n$

$$\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+2} = \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n}$$

2. L'égalité précédente s'écrit aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \\ c_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

On a donc bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+2} = \dfrac{1}{2}a_{n+1} + \dfrac{1}{2}a_n \\ b_{n+2} = \dfrac{1}{2}b_{n+1} \\ c_{n+2} = \dfrac{2}{3}c_{n+1} + \dfrac{1}{3}c_n \end{cases}}$

3. Le calcul matriciel : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ nous permet directement de conclure :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(On peut également déterminer P^{-1} grâce à la méthode du pivot de Gauss). On obtient alors :

$$Y_0 = P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ et } : Y_1 = P^{-1}X_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4. La suite (a_n) est une suite récurrente linéaire double, d'équation caractéristique : $x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} = 0$. Cette équation admet deux solutions : 1 et $-\dfrac{1}{2}$, donc il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \lambda + \mu \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

De plus, $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$, donc : $\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda - \dfrac{1}{2}\mu = 1 \end{cases}$, c'est-à-dire : $\lambda = \dfrac{4}{3}$ et $\mu = \dfrac{2}{3}$.

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

De même, la suite (c_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, admettant pour équation caractéristique : $x^2 - \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3} = 0$. Cette équation admet deux solutions : 1 et $-\dfrac{1}{3}$, donc il existe deux réels λ et μ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \lambda + \mu \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

De plus, $\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = -1 \end{cases}$, donc : $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda - \dfrac{1}{3}\mu = -1 \end{cases}$, c'est-à-dire : $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ et $\mu = \dfrac{3}{2}$.

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Enfin, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme : $b_1 = 1$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Or, $b_0 = 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, donc finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad b_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad c_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

5. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = PY_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{11}{6} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ -\frac{11}{6} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{2}\left(\frac{-1}{3}\right)^n \end{pmatrix}},$$

et on retrouve bien le résultat demandé pour β_n.

6. (a)

```
function res=X(n)
    Xold=[3;0;-1]
    Xnew=[3;0;-2]
    A=[2,1,-2;0,3,0;1,-1,5]/6
    B=[1,-1,-1;-3,3,-3;-1,1,1]/6
    for i=[2:n]
        Aux=(A*Xnew+BXold)/6
        Xold=Xnew
        Xnew=Aux
    end
    res=Aux
endfunction
```

(b) L'expression de X_n calculée à la question 5 permet d'établir que : $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{11}{6} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = -\frac{4}{3} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n = -\frac{11}{6} \end{cases}$

Ainsi, la suite représentée par des croix obliques est la suite (α_n), celle représentée par des astérisques est la suite (β_n) et celle représentée par des losanges est la suite γ_n.

EXERCICE 2

Partie I : Etude de deux suites

1. (a) On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} -\ln(x+1) = 0 \end{cases}$, donc par somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$

   Et $\forall x > 0, \quad f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$, donc directement par somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0}$.

   (b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout réel $x > 0$,

   $f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{-x+1+2x+x^2-x-x^2}{x(1+x)^2} = \dfrac{1}{x(1+x)^2} > 0$

   Donc $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$

   On en déduit le tableau de variations de f :

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	0

   (c) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) = f(n).$

   (d) Le tableau de variations de la fonction f montre que celle-ci est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, $f(n) < 0$ pour tout entier naturel n non nul, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante.}}$

   (e)

```
function y=u(n)
        y=0
        for k=1:n
                y=y+1/k
        end
        y=y-log(n)
endfunction
```

2. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{n+1} - u_n + \dfrac{1}{n} = f(n) - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right).$

   (b) La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, sa courbe représentative est donc située en dessous de ses tangentes, en particulier en dessous de la tangente au point d'abscisse 0, d'équation $y = x$.

   Donc $\boxed{\forall x > 0, \quad \ln(1+x) \leqslant x.}$

   En appliquant l'inégalité à $x = \dfrac{1}{n}$, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}$.

   Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} - v_n \geqslant 0$, et $\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est croissante.}}$

(c) Au voisinage de 0, $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = x - \dfrac{x}{2} + \circ(x^2)$.

Et lorsque n tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0. Donc au voisinage de $+\infty$:

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n^2} + \circ\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Donc $\boxed{v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}.}$

(d) D'après l'équivalent précédent, comme les suites $(v_{n+1} - v_n)$ et $\left(\dfrac{1}{2n^2}\right)$ sont positives, on sait d'après le théorème d'équivalence des séries de termes positifs que $\sum\limits_{n\geqslant 1}(v_{n+1}-v_n)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{2n^2}$ ont même nature.

Or, $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{2n^2}$ converge en tant que série de Riemann ($\alpha = 2 > 1$), donc $\boxed{\text{la série de terme général } v_{n+1} - v_n \text{ conve}}$

(e) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum\limits_{k=1}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} v_{k+1} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} v_k = \sum\limits_{k=2}^{n} v_k - \sum\limits_{k=1}^{n-1} v_k = v_n - v_1.$

Ou encore : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = v_1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) = \sum\limits_{k=1}^{n-1}(v_{k+1} - v_k).$

On reconnaît alors la somme partielle d'une série convergente, donc en déduit que $\boxed{(v_n) \text{ converge vers } \gamma.}$

3. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = v_n + \dfrac{1}{n}$, donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } \gamma.}$

(b) La suite (u_n) est strictement décroissante et converge vers γ, donc ses termes sont strictement supérieurs à γ. La suite (v_n) est strictement croissante et converge vers γ, donc ses termes sont strictement inférieurs à γ. Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n < \gamma < u_n.}$

En retranchant u_n dans chaque membre de l'encadrement précédent, on obtient : $v_n - u_n < \gamma - u_n < 0$, et en multipliant par -1 : $0 < u_n - \gamma < \dfrac{1}{n}$. Ceci montre bien que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n - \gamma| < \dfrac{1}{n}.}$

(c) Pour tout réel $\varepsilon > 0$, $\left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon} < \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$.

Donc en posant $n_0 = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, n_0 est un entier supérieur à $\dfrac{1}{\varepsilon}$.

En composant par la fonction inverse : $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Donc, d'après l'inégalité de la question précédente : $|u_{n_0} - \gamma| < \varepsilon$. Autrement dit, le réel u_{n_0} est une valeur approchée de γ à ε près !

Le programme demande à l'utilisateur une valeur de ε et affiche donc, en calculant le réel u_{n_0} correspondant, une valeur approchée de γ à ε près (par excès).

Partie II : Etude d'une série

1. $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite positive, et $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$.

   Or, la série de terme général $\dfrac{1}{2n^2}$ converge, donc la série de terme général a_n converge.

2. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{1}{k}$, et en modifiant l'indexation des sommes :

   $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$. On obtient alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}}$$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{2n-1} = \dfrac{\alpha(2n-1)+\beta n}{n(2n-1} = \dfrac{(2\alpha+\beta)n-\alpha}{n(2n-1)}$.

   On procède alors par identification : $\begin{cases} 2\alpha+\beta = 0 \\ \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases}$.

   Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = -\dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{2n-1}}$

   (c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{n} + \frac{2}{2n-1}\right) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} + 2\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = 2\left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = 2\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

3. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle u_{2n} - u_n + \ln(2) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) + \ln(2) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

   (b) D'après les questions précédentes, pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2(u_{2n} - u_n) + 2\ln(2)$$

   Or, les suites (u_{2n}) et (u_n) convergent vers la même limite : γ, donc

$$\lim_{n\to+\infty} (2(u_{2n} - u_n) + 2\ln(2)) = 2\ln 2.$$

   Ainsi, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2\ln(2)}$

4. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \underset{j=k-n}{=} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$

   (b) Soit $h(t) = \dfrac{1}{1+t}$. La fonction h est continue sur $[0,1]$, donc on peut lui appliquer la formule dite des sommes de Riemann :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \int_0^1 h(t)dt,$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln(2).$$

C'est bien le résultat obtenu auparavant.

EXERCICE 3

Partie I

1. On réalise ici 3 expériences de Bernoulli (3 lancers de pièce) indépendantes et de même probabilité de succès (obtenir pile). X compte le nombre de succès.

$$\boxed{X \text{ suit la loi binomiale de paramètres 3 et } \frac{2}{3}.}$$

$$P(A) = P(X=0) + P(X=2) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3.\left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{27} + \frac{12}{27} = \frac{13}{27}.$$

2. On répond ici sous forme de tableau :

valeur prise par X	0	1	2	3
valeur prise par G	0	-10	20	-30
probabilité	1/27	6/27	12/27	8/27

3. $E(G) = 0.P(G=0) - 10P(G=-10) + 20P(G=20) - 30P(G=-30) = 10\left(-\frac{6}{27} + \frac{24}{27} - \frac{24}{27}\right)$

Donc $\boxed{E(G) = -\frac{20}{9}.}$ L'espérance de gain est négative, donc le jeu est défavorable au joueur.

Partie II

1. (a) On répond à nouveau sous forme de tableau :

Parité de X	Impair	Pair
Valeur de Y	-1	1
Valeur de Z	0	1

Donc Z suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.

   (b) $Z = \dfrac{Y+1}{2}$, donc $Y = 2Z - 1$. Et par linéarité de l'espérance : $\boxed{E(Y) = 2E(Z) - 1 = 2P(A) - 1}$.

CONCOURS ECRICOME PREPA

2. (a) On réalise ici n expériences de Bernoulli (n lancers de pièce) indépendantes et de même probabilité de succès (obtenir pile). X compte le nombre de succès.
Ainsi, $\boxed{X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p.}$

(b) La variable aléatoire Y est une variable aléatoire finie, donc elle admet une espérance. Et d'après la formule du transfert :

$$E(Y) = \sum_{k \in X(\Omega)} (-1)^k P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Calculons cette somme en faisant apparaître la formule du binôme de Newton :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k} = (-p+1-p)^n$$

On obtient bien : $\boxed{E(Y) = (1-2p)^n.}$

3. D'après les questions 1) et 2) : $E(Y) = 2P(A) - 1 = (1-2p)^n$. Donc $\boxed{P(A) = \dfrac{1+(1-2p)^n}{2}.}$

4. Ainsi, $P(A) \geqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow (1-2p) \geqslant 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (1-2p) \geqslant 0 \\ \text{ OU} \\ \text{n pair} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} p \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \text{ OU} \\ \text{n pair} \end{array}\right.$

Partie III

1. $G = 10XY = 10X(-1)^X$. Toujours d'après la formule du transfert : $E(G) = 10 \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(-1)^k P(X=k)$.

2. $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\binom{n}{k} = k\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1)!} = n\binom{n-1}{k-1}$.

3. $E(G) = 10 \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
et après avoir isolé le terme pour $k = 0$ (qui vaut 0) :

$$E(G) = 10n \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = 10n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (-p)^k (1-p)^{n-k}$$

C'est maintenant le temps du changement d'indice : $j = k - 1$:

$$E(G) = 10n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-p)^{k+1} (1-p)^{n-k-1} = -10np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k-1}$$

On reconnaît alors à nouveau la formule du binôme : $\boxed{E(G) = -10np(1-2p)^{n-1}}$

4. Si $p \leqslant \dfrac{1}{2}$, alors $1-2p \geqslant 0$, donc on a directement $P(A) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $E(G) \leqslant 0$.

   Réciproquement, si $P(A) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $E(G) \leqslant 0$, alors $(1-2p)^n$ et $(1-2p)^{n-1}$ sont de même signe, donc $1-2p \geqslant 0$, donc $p \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   $$\text{Donc } \boxed{\left[P(A \geqslant \frac{1}{2} \text{ et } E(G) \leqslant 0\right] \Leftrightarrow p \leqslant \frac{1}{2}.}$$

5. (a) La fonction f est dérivable sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, et

   $\forall x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, $f'(x) = (1-2x)^{n-1} - 2(n-1)x\,(1-2x)^{n-2} = (1-2nx)\,(1-2x)^{n-2}$.

   Ainsi, $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow (1-2nx) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{1}{2n}$.

   $$\text{Donc } \boxed{\text{la fonction } f \text{ est croissante sur } \left[0, \frac{1}{2n}\right] \text{ et décroissante sur } \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2}\right].}$$

   (b) Pour optimiser son activité, le concepteur doit faire en sorte que l'espérance de gain du joueur soit la plus petite possible, c'est-à-dire qu'il faut choisir p tel que $-10np(1-2p)^{n-1}$ soit minimal, autrement dit que $p(1-2p)^{n-1} = f(p)$ soit maximal.

   Il faut prendre : $\boxed{p = \dfrac{1}{2n}.}$

Partie IV

1. Donnons encore le résultat sous forme de tableau :

Valeur de X	0	1	2
Valeur de G_i	0	-10	20
Probabilité	9/16	6/16	1/16

   $E(G_i) = -10\dfrac{6}{16} + 20\dfrac{1}{16} = -\dfrac{40}{16} = \boxed{-\dfrac{5}{2}}$

   $E(G_i^2) = 100 \times \dfrac{6}{16} + 400 \times \dfrac{1}{16} = 100 \times \dfrac{10}{16} = \dfrac{125}{2}$

   $V(G_i) = E(G_i^2) - (E(G_i))^2 = \dfrac{125}{2} - \dfrac{25}{4} = \boxed{\dfrac{225}{4}}$

2. $J = -\sum_{k=1}^{200} G_i$, donc par linéarité de l'espérance : $E(J) = -\sum_{k=1}^{200} E(G_i) = 200 \times \dfrac{5}{2} = 500$.

   Et par indépendance des variables aléatoires G_i :

   $$V(J) = \sum_{k=1}^{200} V(-G_i) = 200 \times \frac{225}{4} = 11250$$

3. $P\left(|J-500| \geqslant 400\right) = P\left([J \geqslant 900] \cup [J \leqslant 100]\right)$. Or, $[J \leqslant 100] \subset [J \geqslant 900] \cup [J \leqslant 100]$, donc

   $$P(J \leqslant 100) \leqslant P\left([J \geqslant 900] \cup [J \leqslant 100]\right)$$

Conclusion : $\boxed{P(J \leqslant 100) \leqslant P\left(|J-500| \geqslant 400\right).}$

4. La variable aléatoire J admet un moment d'ordre 2, on peut donc lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :
$$\forall \epsilon > 0, \quad P\left(|J - E(J)| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{V(J)}{\epsilon^2}$$
En posant $\epsilon = 400$ et en remplaçant l'espérance et la variance de J par les valeurs trouvées à la question précédente, on obtient :
$$P\left(|J-500| \geqslant 400\right) \leqslant \frac{11250}{400^2}$$
Et $\dfrac{11250}{400^2} = \dfrac{2 \times 5^4 \times 9}{5^4 \times 16^2} = \dfrac{9}{128}$. Ainsi : $\boxed{P(J \leqslant 100) \leqslant \dfrac{9}{128}.}$

5. Remarquons que $\dfrac{9}{128} < \dfrac{12,8}{128} \leqslant 0,1$. Ainsi, la probabilité que le forain gagne moins de 100 euros dans la journée est inférieur à $0,1$. Il peut ouvrir sons stand !

RAPPORT D'ÉPREUVE

Commentaires généraux

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un pré-requis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné. Un manque de dextérité dans les calculs est constaté. Il est conseillé de s'entrainer très régulièrement à faire des calculs;

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que, plus des deux tiers des candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Avec une moyenne de 10,91 et un écart-type de 5,95, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Commentaires particuliers

Exercice 1

Cet exercice d'algèbre linéaire, permettait de vérifier les acquis des candidats sur les notions fondamentales d'algèbre du programme de première et deuxième année, à savoir le calcul matriciel, les applications linéaires et leur représentation matricielle, ainsi qu'un peu d'algorithmique. Il a été abordé par la quasi-intégralité des candidats, notamment grâce à sa position en début du sujet. Volontairement progressif, il était rédigé de manière à ce que les candidats comprennent les méthodes attendues dans chaque question parmi les choix possibles, mais cela n'a malheureusement pas été toujours le cas).

Partie I

1. (a) Cette question ne nécessitait que du calcul matriciel et a été globalement bien traitée. Il est étonnant que certains candidats maladroits obtiennent une matrice un peu compliquée comme résultat, qui ne soit ni la matrice nulle, ni liée à la matrice identité ou à la matrice A, et ne pensent alors pas à vérifier leurs calculs.

(b) On attend ici un appel explicite à un « polynôme annulateur de A », à mentionner, et un rappel précis du (bon) lien entre les racines de ce polynôme et les valeurs propres de A.

(c) Il est dommage que certains candidats ne voient pas la méthode à appliquer ici, en lien avec la question précédente. Et, au lieu de résoudre directement les équations $AX = 3X$ et $AX = 4X$ (ou d'étudier les noyaux des matrices $A - 3I_3$ou $A - 4I_3$), s'empressent de repartir de la matrice $A - \lambda I_3$ pour déterminer, par la méthode du pivot de Gauss, toutes les valeurs propres, ce qui était possible mais long, fastidieux, et évitabel ici.

Lorsqu'on attend une base du sous-espace propre, lorsque le sous-espace trouvé est de dimension au moins deux, il faut citer explicitement un argument pour justifier de la liberté de la famille proposée pour la base.

(d) Comme pour la question précédente, certains candidats ne voient pas le lien entre les questions et veulent redémontrer l'inversibilité (ou non) de la matrice par du pivot de Gauss, au lieu d'utiliser les valeurs propres de la matrice A qui ont déjà été déterminées.
Les candidats cependant connaissent bien les conditions de diagonalisabilité d'une matrice.

2. (a) Le noyau de f a souvent été bien déterminé, mais certains candidats ne voient pas le lien avec les valeurs propres de f.

(b) Ici encore, le rang de la matrice $B - 2I_3$ a souvent été bien fait.

(c) Autant les candidats voient comment calculer $f(e_1 - e_2 - e_3)$, il est étonnant qu'ils écrivent le résultat sans se rendre compte de ce qu'ils viennent de montrer, et faire apparaître explicitement le vecteur initial dans leur résultat.

(d) C'est dans cette question qu'on voit vraiment les candidats qui savent prendre un peu de recul face au sujet et à la lecture des questions. Les trois valeurs propres étaient déjà déterminées pour l'endomorphisme f dans les questions (a), (b) et (c), chacune sous une forme différente. Mais beaucoup de candidats n'ont pas fait le lien et sont repartis de la matrice $B - \lambda I_3$ pour déterminer les valeurs propres de f, ce qui était encore une fois long, fastidieux, et source potentielle d'erreurs.

3. Cette question nécessitait de prendre un peu d'initiative pour répondre correctement. Les candidats n'ont souvent pas compris ce qu'on attendait d'eux exactement.

Partie II

1. Cette question a en général été bien traitée.
2. Cette question nécessitait d'avoir obtenu correctement la matrice D_1 dans la partie I, mais les candidats ont en général pu obtenir les relations de récurrence proposées.
3. Il est encore dommage qu'ici les candidats fassent preuve d'un manque de recul face aux méthodes employées. Il ne s'agissait bien sûr pas ici de déterminer P^{-1} par la méthode de Gauss, le résultat étant donnée par l'énoncé. Une simple vérification du produit donnant la matrice identité était amplement suffisant pour répondre à la question.
4. Cette question demande de bien connaître le cours de première année pour obtenir la forme générale des suites géométriques et des suites récurrentes linéaires doubles. Les candidats ont en général la bonne méthode en tête, mais l'appliquent de manière parfois hâtive, se trompant alors dans les calculs élémentaires mis en oeuvre.

5. Cette question a souvent été admise, car les candidats n'avaient pas souvent obtenus les valeurs explicites de a_n, b_n et c_n.
6. (a) Les questions d'informatique, à leur habitude sont fortement valorisées dans le barème de l'épreuve. Il est dommage que seule une moitié des candidats n'aborde cette question.
   Nécessitant uniquement des notions élémentaires d'algorithmique, elle devrait être un objectif raisonnable pour tout candidat. La principale difficulté était ici qu'on imposait l'ordre dans lequel on devait affecter les variables.
   (b) Cette dernière question demandait seulement d'avoir un peu de recul face aux questions démontrées précédemment, les réponses étaient à peu de choses près déjà lisibles dans les questions précédentes.

Exercice 2

Cet exercice d'analyse avait pour but d'étudier un développement asymptotique de la série harmonique, puis d'étudier la somme d'une série à l'aide de la constante d'Euler γ. La première partie était assez classique sous sa forme, manipulant des études de fonctions, des suites et des séries, a été abordée par la majorité des candidats, avec plus ou moins de réussite selon leur niveau de rigueur. La deuxième partie, plus technique, demandait plus d'habileté sur les manipulations des sommes et des séries, et a été de facto délaissée par la plupart des candidats.

Partie I

1. (a) Autant la limite en 0 ne posait pas de réelle difficulté, autant la forme indéterminée qui apparaissait en $+\infty$ nécessitait des explications précises dans la réponse que les candidats apportaient.
   (b) L'étude de fonctions a été bien réussie, malgré quelques erreurs de calculs pour simplifier l'expression de la dérivée. Il est alors important d'avoir une cohérence entre le tableau de variations proposé et les limites obtenues en (a). Si un candidat obtient par erreur une fonction décroissante sur $]0, +\infty[$ avec limite $-\infty$ en 0, il devrait au moins signaler sur sa copie qu'il remarque une erreur manifeste.
   (c) Le résultat étant donné dans l'énoncé, on attend des calculs clairs. Certains candidats tentent cependant de maquiller leurs erreurs, en changeant certains signes pour arriver au résultat. L'honnêteté est toujours attendue sur les calculs, et il vaut toujours mieux signaler une erreur dans ses calculs et admettre le résultat plutôt que de les transformer. La présence de truandages de la sorte instaure dès lors un sentiment de non-confiance du correcteur envers le candidat et mettra alors en doute l'intégralité des questions suivantes.
   (d) Beaucoup de candidats ont cru, un peu vite, que comme f était croissante, alors la suite (u_n) l'était aussi.
   (e) Cette question d'informatique demandait de calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ en langage Scilab. Signalons que lorsqu'il s'agit comme ici de rédiger une fonction entière en Scilab, les correcteurs sont indulgents concernant les en-têtes et la syntaxe globale du programme, et l'attente est surtout mise sur le contenu du script. La principale erreur a été souvent d'intégrer le $-\ln(n)$ dans les termes à sommer, plutôt que de l'ajouter en fin de programme.
2. (a) Les mêmes remarques qu'à la question (c) s'appliquent.

(b) La plupart des candidats ont bien répondu à cette question, définissant spontanément une fonction à étudier, puis faisant le lien avec la question précédente. Certains candidats plus habiles mentionnent la concavité de la fonction logarithme népérien.

(c) Comme chaque année, les développements limités donnent lieu à des réponses des plus fantaisistes. Il est attendu des candidats qu'ils apprennent mieux les formules usuelles, à l'ordre 2 ou 3 comme le demande le programme.

(d) La question a été bien résolue par une majorité des candidats.

(e) Autant les candidats ont reconnu une somme télescopique à simplifier, peu n'ont pu en déduire la convergence de la suite (v_n) ensuite.

3. (a) Cette question (qui apparaissait incomplète sur le sujet original) a été peu comprise par les candidats qui l'ont souvent admise pour continuer.

(b) De même, cette question, plus délicate a été délaissée, la valeur absolue ayant sûrement rebuté certains candidats même bons.

(c) Ici, les candidats n'ont clairement pas compris ce que faisait le programme proposé. Beaucoup ont simplement répondu « le programme calcule u_n », sans faire le lien avec la question 3(b).

Partie II

1. Cette question a été bien traitée, comme pour la question 2(c) de la partie I, puisque mettant en jeu les mêmes compétences à évaluer.

2. (a) Seuls les bons candidats ont remarqué qu'il était question ici de séparer les termes pairs et impairs de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$

(b) Cette question a été bien traitée par les candidats.

(c) Souvent les candidats se sont arrêtés à remplacer a_n par la formule de la question (b) sans aller plus loin.

3. (a) Cette question nécessitait d'appliquer la relation de Chasles pour appliquer la définition de (u_n) mais a été souvent peu abordée.

(b) Pour les candidats qui avaient continué sur cette partie, ils ont en général bien répondu à cette question grâce à la réponse de la question 3(a).

4. (a) Cette question a été peu abordée, sûrement faute de temps.

(b) Seuls quelques rares très bons candidats ont reconnu une somme de Riemann et ont su conclure, la plupart des candidats n'ont pas abordé cette question.

Exercice 3

Cet exercice, en plus parties successives relativement indépendantes, testait les candidats sur les probabilités discrètes finies vues en première année. Avec la loi binomiale, il demandait d'être à l'aise avec le théorème de transfert, les coefficients binomiaux et les inégalités de concentration. Par sa place en troisième position, il a été moins abordé que les deux autres exercices, sûrement faute de temps par les candidats. Mais il y avait beaucoup de points à obtenir, donc les candidats qui avaient démarré par cet exercice ont en général bien pu avancer et obtenir de nombreux points notamment sur les dernières questions.

Partie I

1. La loi binomiale a été bien reconnue par les candidats, ce qui a permis à la majorité des candidats de répondre correctement, mais il fallait bien préciser ici que les paramètres étaient 3 et $2/3$.
2. Cette question était sensée guider les candidats sur la compréhension du jeu, puisque $G(\Omega)$ était donné. Elle a été ainsi bien traitée.
3. L'espérance de la variable aléatoire G a été bien traitée. Notons que si les candidats s'étaient trompés dans la question précédente, il y a toujours au moins des points de cohérence, si la bonne formule est appliquée avec les valeurs que le candidat a obtenu à la question précédente. Même si tous les points ne seront pas appliqués, une proportion raisonnable sera obtenue néanmoins.

Partie II

1. (a) Le résultat étant donné dans la question, les candidats ont en général bien su expliquer pourquoi Z suivait bien une loi de Bernoulli.
   (b) Il s'agissait ici simplement d'écrire que $Y = 2Z - 1$ puis d'appliquer la linéarité de l'espérance.
2. (a) On avait, comme dans la question 1, une loi binomiale à reconnaître, le but était simplement ici de bien faire le lien avec la question suivante.
   (b) Certains bons candidats ont compris qu'il fallait ici faire apparaître le théorème de transfert. Les candidats qui ne percevaient pas le lien avec la question (a) ont toutefois pu terminer la question, et appliquer la formule du Binôme de Newton pour obtenir la valeur de $E(Y)$.
3. Cette question, simple conséquence des questions 1(b) et 2(b) a été bien réussie.
4. Ici, les candidats ont souvent répondu sans rigueur, démontrant des erreurs de logique. Seuls les bons candidats ont pu répondre correctement.

Partie III

1. Le lien entre G, X et Y a été en général bien établi, et les candidats ont alors pu appliquer correctement le théorème de transfert.
2. Les candidats ont bien su démontrer cette formule de récurrence sur les coefficients binomiaux dès lors qu'ils connaissaient la définition de $\binom{n}{k}$ avec les factorielles.
3. Cette question demandait d'avoir un peu d'habileté sur les calculs de sommes. Il fallait faire apparaître un changement d'indice, puis appliquer la formule du binôme. Beaucoup de candidats ont souvent admis le résultat.
4. Comme à la question 4 de la partie II, les candidats ont souvent manqué de rigueur pour répondre correctement à l'équivalence attendue, se contentant de mettre bout à bout des informations sans les liers de manière logique.
5. (a) L'étude de la fonction f a été plus difficile que celle présente dans l'exercice 2, la dérivée de $x \mapsto (1-2x)^{n-1}$ a été en général erronée dans beaucoup de copies.
   (b) Les candidats devaient faire le lien ici entre la question 3 et la question 5(a). Le nombre de candidats était réduit en cette fin de sujet, mais ceux qui ont abordé la question ont en général bien répondu.

Partie IV

1. Les candidats qui ont abordé la question ont bien répondu.
2. Cette question a été peu abordée par les candidats, faute de temps.
3. Les candidats sont la plupart du temps peu à l'aise avec la manipulation des inégalités et des valeurs absolues, cette question a par conséquent été peu abordée.
4. Cette question a souvent été la seule abordée sur cette fin de sujet, car contenant une question de cours. Les candidats connaissent en général bien la formule (en faisant le lien avec les questions précédentes) de Bienaymé-Tchebychev, et cela démontre qu'ils tentent toujours de lire le sujet jusqu'au bout même s'il leur manque du temps.
5. Cette question a été très peu abordée, faute de temps.