CONCOURS ECRICOME PREPA
APRÈS CLASSE PRÉPARATOIRE

CORRIGÉ

Exercice 1

Partie I

1. On remarque que $Q \times Q = I_3$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3. Ainsi la matrice Q est inversible et son inverse est : $Q^{-1} = Q$.
2. On calcule le produit de matrices :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

La matrice D est donc bien diagonale.
On a alors :
$$D = QMQ \iff Q^{-1}DQ^{-1} = M \iff QDQ = M \iff M = QDQ$$

3. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$: « $M^n = QD^nQ$ »
   - Pour $n = 0$, on a $M^0 = I_3$ et $QD^0Q = Q^2 = I_3$. Ainsi, $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
   - Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\mathcal{H}(n)$ soit vérifiée. On a alors :
   $$M^{n+1} = M^nM \overset{(\mathcal{H}(n))}{=} (QD^nQ)(QDQ) = QD^nDQ = QD^{n+1}Q$$
   donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.
   - Par récurrence, la propriété $\mathcal{H}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.
4. On a alors :
$$M^n = QD^nQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -(\frac{1}{2})^n & -2(\frac{1}{2})^n \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1-(\frac{1}{2})^n & 1-2(\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{4})^n \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 2(\frac{1}{2})^n-2(\frac{1}{4})^n \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix}$$

Partie II

1. On lance une fois les deux pièces. Notons P_1 (reps. P_2) l'événement « On fait Pile avec la pièce numéro 1 (resp. numéro 2) ». On a alors :
$$a_1 = P(A_1) = P(F_1 \cap F_2) = P(F_1)P(F_2) = \frac{1}{4}$$

$$b_1 = P(B_1) = P(P_1 \cap F_2) + P(F_1 \cap P_2) = P(P_1)P(F_2) + P(F_1)P(P_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$c_1 = P(C_1) = P(P_1 \cap P_2) = P(P_1)P(P_2) = \frac{1}{4}$$

2. Si A_n est réalisé, on a obtenu 0 Pile à l'étape n, donc on ne va lancer aucune pièce à l'étape $n+1$. Ainsi, on est certain que A_{n+1} sera réalisé.

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 1$$

Si B_n est réalisé, on a obtenu 1 Pile à l'étape n, donc on va lancer une pièce à l'étape $n+1$. On obtient A_{n+1} si et seulement si cette pièce donne Pile, on a donc :

$$P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

Si C_n est réalisé, on a obtenu 2 Pile à l'étape n, donc on va lancer deux pièces à l'étape $n+1$. On est dans la même configuration que l'étape 1, donc :

$$P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$$

Soit $n \geqslant 1$. On sait que (A_n, B_n, C_n) forme un système complet d'événements, donc d'après la formules des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times 1 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{4} \end{aligned}$$

De même, on obtient :

$$\begin{aligned} b_{n+1} = P(B_{n+1}) &= P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) + P(C_n \cap B_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) \\ &= a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} c_{n+1} = P(C_{n+1}) &= P(A_n \cap C_{n+1}) + P(B_n \cap C_{n+1}) + P(C_n \cap C_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) \\ &= a_n \times 0 + b_n \times 0 + c_n \times \frac{1}{4} \end{aligned}$$

3. On a donc bien pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ \frac{1}{4}c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

Pour $n = 1$, on a bien $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = I_3 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M^{1-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$.

Soit $n \geqslant 1$. Supposons qu'on ait $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M \times M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

Donc par récurrence, la formule est bien vérifiée pour tout $n \geqslant 1$.

4. (a) En utilisant le résultat de la question I.4, on obtient :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-\dfrac{1}{2^{n-1}} & 1-\dfrac{2}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{4^{n-1}} \\ 0 & \dfrac{1}{2^{n-1}} & \dfrac{2}{2^{n-1}}-\dfrac{2}{4^{n-1}} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{4^{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{2}{2^n}+\frac{1}{4^n} \\ \frac{2}{2^n}-\frac{2}{4^n} \\ \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$$

(b) On a bien :

$$\left(1-\frac{2}{2^n}+\frac{1}{4^n}\right)+\left(\frac{2}{2^n}-\frac{2}{4^n}\right)+\frac{1}{4^n}=1$$

et on obtient directement que :

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n)=1, \qquad \lim_{n\to+\infty} P(B_n)=\lim_{n\to+\infty} P(C_n)=0$$

Exercice 2

1. Par quotient, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$.
Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
Par quotient, on a $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ (car $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(x)=0^-$) Par quotient, on a $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ (car $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x)=0^+$)

2. Pour $x\in D$, on a $f'(x)=\dfrac{1\ln(x)-x\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{\ln(x)-1}{(\ln x)^2}$.
De plus, on sait que $(\ln x)^2$ est toujours positif (c'est un carré), donc $f'(x)\geqslant 0 \Longleftrightarrow \ln(x)-1\geqslant 0$.

3. (a)

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

(b) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[e,+\infty[$, donc f réalise une bijection de $[e,+\infty[$ sur $f([e,+\infty[)=[f(e),\lim\limits_{+\infty} f(x)[=[e,+\infty[$.

4. (a) Pour $x\in D$, on a :

$$f(x)=x \Longleftrightarrow \frac{x}{\ln(x)}=x \Longleftrightarrow x=x\ln(x) \Longleftrightarrow x(1-\ln(x))=0 \overset{(x\neq 0)}{\Longleftrightarrow} \ln(x)=1 \Longleftrightarrow x=e$$

Ainsi : $\mathcal{S}=\{e\}$.

(b) Pour $x\in D$, on a :

$$f(x)-x=\frac{x}{\ln(x)}-x=\frac{x(1-\ln(x))}{\ln(x)}$$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$1-\ln(x)$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-x$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Ainsi, $f(x)-x\leqslant 0$ pour $x\in]1,e]$ et $f(x)-x\geqslant 0$ pour $x\in]0,1[\cup[e,+\infty[$.

5. (a)
   - $u_0=3$, donc on a bien $u_0\geqslant e$.
   - Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $u_n\geqslant e$, alors, d'après la question précédente, $f(u_n)-u_n\geqslant 0$, donc $f(u_n)\geqslant u_n\geqslant e$, i.e. $u_{n+1}\geqslant e$.
   - Par récurrence, on a donc bien que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geqslant e$.

   (b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_n\geqslant e$, donc toujours d'après la question (b), on a :

   $$\forall n\in\mathbb{N},\ f(u_n)-u_n\geqslant 0,\ \text{i.e. } u_{n+1}\geqslant u_n$$

   La suite (u_n) est donc décroissante.

   (c) La suite (u_n) est décroissante, et minorée (par e), donc converge vers un réel ℓ qui vérifie $\ell\geqslant e$. De plus, puisque $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)$ avec f continue en ℓ, par passage à la limite lorsque $n\to+\infty$, on obtient que $\ell=f(\ell)$, donc d'après la question 4(a), on a nécessairement $\ell=e$.

6. (a) On a pour tout $x\geqslant e$,

   $$\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{\ln(x)}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{\ln(x)}+\frac{4}{(\ln x)^2}\right)=\frac{1}{\ln(x)}-\frac{1}{(\ln x)^2}=\frac{\ln(x)-1}{(\ln x)^2}=f'(x)$$

   (b) Pour tout $x\geqslant e$, puisque $\frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{\ln(x)}\right)^2\geqslant 0$, on a :

   $$f'(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{\ln(x)}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}$$

   De plus, f est croissante sur $[e,+\infty[$, donc on a $f'(x)\geqslant 0$ pour $x\geqslant e$, donc :

   $$\forall x\geqslant e,\ 0\leqslant f'(x)\leqslant\frac{1}{4},\qquad\text{donc } |f'(x)|\leqslant\frac{1}{4}$$

7. (a) La fonction f est continue et dérivable sur $[e,+\infty[$, et $\forall x\in[e,+\infty[$, $|f'(x)|\leqslant\frac{1}{4}$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

   $$\forall a,b\in[e,+\infty[,\ |f(a)-f(b)|\leqslant\frac{1}{4}|a-b|$$

   En particulier pour $a=u_n$ (pour $n\in\mathbb{N}$) et $b=e$ (qui vérifie $f(e)=e$), on a :

   $$\forall n\in\mathbb{N},\ |u_{n+1}-e|\leqslant\frac{1}{4}|u_n-e|$$

   (b)
   - $u_0=3$, donc on a bien $|u_0-e|\leqslant 1=\frac{1}{4^0}$.
   - Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $|u_n-e|\leqslant\frac{1}{4^n}$, alors, d'après la question précédente, $|u_{n+1}-e|\leqslant\frac{1}{4}|u_n-e|\leqslant\frac{1}{4}\times\frac{1}{4^n}=\frac{1}{4^{n+1}}$.
   - Par récurrence, on a donc bien que : $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n-e|\leqslant\dfrac{1}{4^n}$.

   (c) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{4^n}=0$, on en déduit par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-e)=0$, i.e. (u_n) converge vers e.

CONCOURS ECRICOME PREPA
APRÈS CLASSE PRÉPARATOIRE

Exercice 3

Partie I

1. (a) On répète ici 100 fois une même épreuve succès/échec (un succès = recevoir un appel concernant le produit A, de probabilité 0.05, et un échec = recevoir un appel concernant le produit B, de probabilité 0.95) de manière identique et indépendante, et X compte le nombre de succès lors de ces 100 appels. X suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0.05)$. On a donc :

$$X(\Omega) = [\![0, 100]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in X(\Omega),\ P(X = k) = \binom{100}{k}(0.05)^k(0.95)^{100-k}$$

(b) On a $E(X) = 100 \times 0.05 = 5$ et $V(X) = 100 \times 0.05 \times 0.95 = 4.75$

Il y a un nombre X d'appels pour le produit A, ce qui génère donc $95X$ euros.
Il y a également un nombre $100 - X$ d'appels pour le produit B, ce qui génère alors $5(100 - X)$ euros.
On a donc :

$$Y = 95X + 5(100 - X) = 90X + 500$$

On a alors $E(Y) = 90E(X) + 500 = 950$ et $V(Y) = 90^2V(X) = 38475$.
Si on approche la loi de X par Z qui suit une loi de Poisson de paramètre λ, telle que $E(Z) = E(X)$, on a alors nécessairement $\lambda = 5$. On en déduit que :

$$P(X \geqslant 10) = 1 - P(X \leqslant 9) = 1 - 0,968 = 0,032$$

Partie II

1. (a) On a ici une répétition (infinie) d'épreuves succès/échec (un succès = recevoir un appel concernant le produit A, de probabilité 0.2, et un échec = recevoir un appel concernant le produit B, de probabilité 0.8) de manière identique et indépendante, et X_A désigne le rang d'apparition du premier succès. Ainsi, X_A suit une loi géométrique de paramètre 0.2. On a donc :

$$X_A(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall k \in X(\Omega),\ P(X_A = k) = (0.8)^{k-1} \times 0.2$$

On a alors $E(X_A) = \dfrac{1}{0.2} = 5$ et $V(X_A) = \dfrac{0.8}{0.2^2} = 20$.
On a enfin $E(X_A^2) = V(X_A) + (E(X_A))^2 = 20 + 5^2 = 45$.

(b) De même, X_B suit une loi géométrique de paramètre 0.8 :

$$X_B(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall k \in X(\Omega),\ P(X_B = k) = (0.2)^{k-1} \times 0.8$$

on a $E(X_B) = \dfrac{1}{0.8} = 1.25$ et $V(X_B) = \dfrac{0.2}{0.8^2} = 0,3125$.
On a enfin $E(X_B^2) = V(X_B) + (E(X_B))^2 = 0,3125 + 1.25^2 = 1.875$.

2. (a) $(L = n) \cap (X_B = n + 1)$ correspond à l'événement $AA \dots AAB$ où il y a eu n « A » puis 1 « B ».
De même, $(L = n) \cap (X_A = n + 1)$ correspond à l'événement $BB \dots BBA$ où il y a eu n « B » puis 1 « A ».

(b) On a donc :

$$\begin{aligned}
P(L = n) &= P([L = n] \cap [X_A = n + 1]) + P([L = n] \cap [X_B = n + 1]) \quad \text{(événements incompatibles)}\\
&= P(X_A = n + 1) \times P_{[X_A=n+1]}(L = n) + P(X_B = n + 1) \times P_{[X_B=n+1]}(L = n)\\
&= P(X_A = n + 1) \times 1 + P(X_B = n + 1) \times 1\\
&= 0.8^n \times 0.2 + 0.2^n \times 0.8\\
&= 0.8 \times (0.8^{n-1} \times 0.2) + 0.2 \times (0.2^{n-1} \times 0.8)\\
&= 0.8 \times P(X_A = n) + 0.2 \times P(X_B = n)
\end{aligned}$$

3. On a donc pour $N \geqslant 1$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} nP(L=n) &= 0.8\sum_{n=1}^{N} nP(X_A=n) + 0.2\sum_{n=1}^{N} nP(X_B=n)\\ &\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.8E(X_A)+0.2E(X_B)\end{aligned}$$

donc L admet une espérance qui vérifie

$$E(L) = 0.8\times E(X_A) + 0.2\times E(X_B) = 4.25$$

De même, pour $N \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} n^2P(L=n) &= 0.8\sum_{n=1}^{N} n^2P(X_A=n) + 0.2\sum_{n=1}^{N} n^2P(X_B=n)\\ &\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.8E(X_A^2)+0.2E(X_B^2)\end{aligned}$$

donc L^2 admet une espérance qui vérifie

$$E(L^2) = 0.8\times E(X_A^2) + 0.2\times E(X_B^2) = 36,375$$

On a donc finalement $V(L) = 36.375 - 4.25^2 = 18.3125$.

Partie III

1. On sait que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0\\ e^{-x} & \text{si } x\geqslant 0\end{cases} \quad \text{et} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0\\ 1-e^{-x} & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$$

2. Soit $b\geqslant 0$. On note pour tout $t\in[0,b]$:

$$\left|\begin{array}{l} u(t)=t\\ v'(t)=e^{-t}-e^{-2t}\end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} u'(t)=1\\ v(t)=-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\end{array}\right.$$

Les fonctions u et v étant dérivables sur $[0,b]$ de dérivée continue, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^b t(e^{-t}-e^{-2t})dt &= \Big[-te^{-t}+\frac{1}{2}te^{-2t}\Big]_0^b + \int_0^b \Big(e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}\Big)\\ &= -be^{-b}+\frac{1}{2}be^{-2b}+\Big[-e^{-t}+\frac{1}{4}e^{-2t}\Big]_0^b\\ &= -be^{-b}+\frac{1}{2}be^{-2b}-e^{-b}+\frac{1}{4}e^{-2b}+1-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

3. Par croissances comparées, on en déduit que :

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b t(e^{-t}-e^{-2t})dt = 0+0-0+0+1-\frac{1}{4}$$

donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)dt$ converge et vaut $\frac{3}{4}$.

4. Pour $x \geqslant 0$, on a $(M \leqslant x) = (D_1 \leqslant x) \cap (D_2 \leqslant x)$.
5. Par indépendance de D_1 et D_2, on a donc pour $x \geqslant 0$,

$$P(M \leqslant x) = P((D_1 \leqslant x) \cap (D_2 \leqslant x)) = P(D_1 \leqslant x)P(D_2 \leqslant x) = F(x)^2$$

   De plus, puisque $P(M \leqslant x) = 0$ pour $x < 0$, on a bien $P(M \leqslant x) = F(x)^2$ également pour $x < 0$.
6. Pour obtenir une densité de M, il suffit de dériver $P(M \leqslant x)$ (là où cela est possible). Or, on a ici :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(M \leqslant x) = \begin{cases} (1-e^{-x})^2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   donc une densité g de M est :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 2e^{-x}(1-e^{-x}) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

7. On regarde si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt$ converge absolument, i.e. si $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2t(e^{-t} - e^{-2t})$ converge. D'après la question 3, c'est bien le cas, et on a donc :

$$E(M) = 2\int_0^{+\infty} t(e^{-t} - e^{-2t})dt = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

RAPPORT D'ÉPREUVE

Commentaires généraux

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un prérequis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que, près des deux tiers des candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Avec une moyenne de 11,09 et un écart-type de 5,79, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Commentaires particuliers

Exercice 1

Partie I

1. Peu de candidats ont remarqué que la matrice Q était triangulaire sans zéro sur sa diagonale pour conclure à son inversibilité.
   De plus, après le calcul de Q^2, certains résolvent inutilement l'équation $QX = Y$ pour déterminer Q^{-1}.
2. Les calculs étaient dans l'ensemble bien maîtrisés par les candidats.
3. Le raisonnement par récurrence, dans cette question comme pour les autres du même type, a été mieux traité qu'il ne l'avait été les années précédentes. On ne peut que recommander aux étudiants de s'entraîner à cet exercice de manière efficace.
4. Le calcul, qui découle de la question précédente, était assez délicat et n'a pas été toujours assez détaillé, ce qui a conduit à des erreurs de calcul. Heureusement, très peu d'étudiants pensent encore qu'il faut élever chaque coefficient de M à la puissance n pour calculer M^n.

Partie II

1. Très peu d'étudiants pensent à introduire des notations pour décrire les événements demandés.
2. Question dans l'ensemble bien réussie même si les raisonnements étaient parfois un peu confus.
3. Il est rappelé aux candidats que, lorsqu'un résultat est donné dans l'énoncé, on attend sur les copies les justifications amenant à ce résultat, les preuves devant alors être précises.
4. Les calculs matriciels et le raisonnement par récurrence sont globalement bien menés.

5. Les résultats de la question (a) sont souvent admis en raison d'erreurs dans les calculs précédents. Les candidats qui traitent cette question font correctement le lien avec les questions qui précèdent. On attend des candidats qu'ils justifient les limites de suites géométriques intervenant dans l'exercice.

Exercice 2

1. Question peu réussie par les candidats. Soit les résultats sont faux, soit on utilise abusivement ou de manière trop systématique la méthode des croissances comparées, qui est donc confuse pour beaucoup d'étudiants.
2. Le calcul de $f'(x)$ est presque toujours correct. Cependant, le signe de $\ln(x) - 1$ est souvent confondu avec le signe de $\ln(x)$.
3. Cette question dépendait pour beaucoup sur ce qui avait été trouvé à la question 2. Les hypothèses du théorème de la bijection sont souvent incomplètes voire incorrectes.
4. Les raisonnements par équivalences sont parfois utilisés de manière abusive.
5. Peu de candidats ont fait le lien avec les résultats de la question 4. Cela les a obligé à faire des calculs et des raisonnements plus fastidieux. La question (c) a amené un grand nombre de réponses du type « La suite est décroissante et minorée par e, donc converge vers e ».
6. La manipulation des inégalités pose problème, notamment pour majorer $|f'(x)|$.
7. L'énoncé de l'inégalité des accroissements finis est souvent maladroit mais les hypothèses sont souvent énoncées correctement. De rares télescopages ont voulu se substituer au raisonnement par récurrence dans la question (b). Il est rappelé aux futurs candidats qu'ils peuvent être amenés à utiliser un type de raisonnement (par exemple récurrence) sans que ceci ait été précisé dans l'énoncé, surtout dans le cas d'une question usuelle. Les récurrences aperçues dans la question (b) ont cependant été assez bien rédigées.

Exercice 3

Partie I

1. La loi binomiale est bien connue des candidats, même si beaucoup peinent à justifier correctement son emploi.
2. Les candidats ne justifient que rarement l'expression donnée pour Y, révélant une incompréhension de la situation concrète, avec beaucoup de raisonnements fantaisistes pour arriver au résultat indiqué par l'énoncé. Peu de candidats ont su correctement calculer la variance de Y.
3. Les candidats ont dans l'ensemble bien compris comment mettre en place l'approximation binomiale/-poisson. Une large majorité des candidats e cependant considéré que l'événement contraire de $[X \geqslant 10]$ était $[X \leqslant 10]$.

Partie II

1. La loi géométrique est bien connue des candidats, même si beaucoup peinent à justifier correctement son emploi. Très peu ont su utiliser le théorème de Koenig-Huygens pour déterminer l'espérnce de X_A^2.
2. Cette question a été peu réussie par les candidats. Beaucoup ont tenté d'avoir recours à un mauvais système complet d'événements, ce qui démontrait l'incompréhension de l'énoncé.
3. Dans de rares copies, d'excellentes réponses ont été données sur cette question. Les précautions liées aux convergences de séries ont été systématiquement oubliées.

Partie III

1. Cette question, restitution du cours, fut rarement réussie.
2. L'intégration par parties n'est pas assez maîtrisée par les candidats. Sur beaucoup de copies, le calcul a été inachevé.
3. Bien réussi lorsque la question précédente avait abouti.
4. L'égalité entre $[M \leqslant x]$ et $[D_1 \leqslant x] \cap [D_2 \leqslant x]$ n'est souvent pas suffisamment justifiée.
5. Question peu traitée par les candidats.
6. Un grand nombre de candidats pense devoir démontrer ici que la fonction g est bien une densité de probabilité. Il est rappelé aux candidats de bien lire l'intitulé des questions pour ne pas faire de hors-sujet.
7. Question peu traitée par les candidats.