CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. Soient $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ tels que $PX=Y \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a\\ -x+y=b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b & (1)-(2)\\ y=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b & (1)+(2)\end{cases} \Leftrightarrow$ $X=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}Y$ donc P est inversible et $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

2. (a) $P^{-1}A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\quad B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$.

   (b) Puisque B est diagonale, on a $B^n=\begin{pmatrix}1^n&0\\0&2^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^n\end{pmatrix}$.

   (c) Commençons par remarquer que $P^{-1}AP=B \Leftrightarrow AP=PB \Leftrightarrow A=PBP^{-1}$. Pour tout entier n, posons $(\mathcal{H}_n)$: « $A^n=PB^nP^{-1}$ ». **Initialisation** $n=0$. On a $A^0=I_2$ et $PB^0P^{-1}=PI_2P^{-1}=PP^{-1}=I_2$ d'où $A^0=PB^0P^{-1}$ donc $(\mathcal{H}_0)$ est vraie. **Hérédité**. Supposons $(\mathcal{H}_n)$ pour un entier n alors : $A^{n+1}=A^nA=PB^nP^{-1}PBP^{-1}=PB^nI_2BP^{-1}=PB^nBP^{-1}=PB^{n+1}P^{-1}$ ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$ et achève la récurrence. Un calcul direct nous donne $PB^n=\begin{pmatrix}1&2^n\\-1&2^n\end{pmatrix}$, $\quad A^n=PB^nP^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}2^n+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}2^n-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}2^n-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}2^n+\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

3. (a) Pour tout entier n, posons $(\mathcal{H}_n)$: « $u_n\geqslant 1$ ». **Initialisation** $n=0$. On a $u_0=2\geqslant 1$ donc $(\mathcal{H}_0)$ est vraie. **Hérédité**. Supposons $(\mathcal{H}_n)$ pour un entier n alors : $u_{n+1}-1=\dfrac{3u_n+1}{u_n+3}-1=\dfrac{\overbrace{2(u_n-1)}^{\geqslant 0}}{\underbrace{u_n+3}_{\geqslant 0}}\geqslant 0 \Rightarrow u_{n+1}\geqslant 1$ ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$ et achève la récurrence.

   (b) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{3u_n+1}{u_n+3}-u_n=\dfrac{1-u_n^2}{u_n+3}=\dfrac{\overbrace{(1-u_n)}^{\leqslant 0}\overbrace{(1+u_n)}^{\geqslant 0}}{\underbrace{u_n+3}_{\geqslant 0}}\leqslant 0$ donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

   (c) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée par 1 donc elle converge.

   (d) Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$ alors $\dfrac{3u_n+1}{u_n+3}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{3L+1}{L+3}$ et $u_{n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$ donc en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+1}{u_n+3}$, on obtient $L=\dfrac{3L+1}{L+3}\Leftrightarrow L^2+3L=3L+1\Leftrightarrow L^2=1\Leftrightarrow L=\pm 1$. D'autre part, on a $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\geqslant 1$ donc en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient que $L\geqslant 1$ d'où $L=1$.

4. (a) Pour tout entier n, posons $(\mathcal{H}_n)$: « $u_n=\dfrac{a_n}{b_n}$ ». **Initialisation** $n=0$. On a $u_0=2$ et $\dfrac{a_0}{b_0}=\dfrac{2}{1}=2$ d'où $u_0=\dfrac{a_0}{b_0}$ donc $(\mathcal{H}_0)$ est vraie. **Hérédité**. Supposons $(\mathcal{H}_n)$ pour un entier n alors : $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+1}{u_n+3}=\dfrac{\frac{3a_n}{b_n}+1}{\frac{a_n}{b_n}+3}=\dfrac{\frac{3a_n+b_n}{b_n}}{\frac{a_n+3b_n}{b_n}}=\dfrac{3a_n+b_n}{a_n+3b_n}=\dfrac{2a_{n+1}}{2b_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$ et achève la récurrence.

   (b) On a $U_{n+1}=AU_n$ donc $U_n=A^nU_0$.

(c) Un calcul direct donne

$$U_n = A^n U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}2^n + \frac{1}{2} & \frac{1}{2}2^n - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}2^n - \frac{1}{2} & \frac{1}{2}2^n + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}2^n + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}2^n - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{3}{2}2^n + \frac{1}{2} \\ b_n = \frac{3}{2}2^n - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{\frac{3}{2}2^n + \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}2^n - \frac{1}{2}} = \frac{2^n\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)}{2^n\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = 1$$

:

EXERCICE 2

1. (a) $g'(x) = 6x^2 - 6 * \frac{1}{x} = \frac{6}{x}\left(x^3 - 1\right)$

   (b) $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$. En outre, on a $g'(x) \geqslant 0 \underset{x\geqslant 0}{\Leftrightarrow} x^3 - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^3 \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 1$ donc le tableau de variations de g est donné par

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

   (c) D'après le tableau précédent, on peut affirmer que $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

2. (a) Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$, on peut affirmer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\ln(x) * \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$. D'autre part, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 - \infty = -\infty$. D'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$

   (b) $\frac{f(x)}{x} = 2 + \frac{3\ln(x)}{x^3} \underset{x\to+\infty}{\to} 2$ donc $a = 2$. $f(x) - 2x = \frac{3\ln(x)}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ donc $b = 0$.

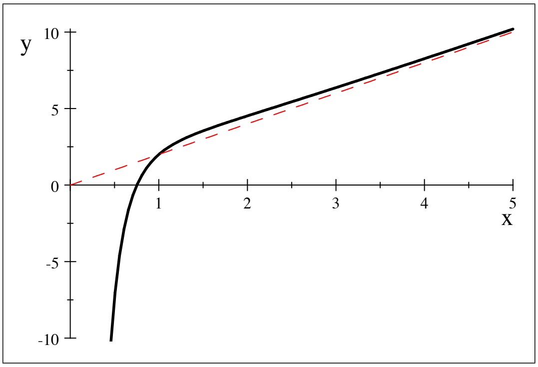
   (c) On a $(\mathcal{A}) : y = 2x$ et $f(x) - 2x = \frac{3\ln(x)}{x^3} \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$ donc $(\mathcal{A})$ est au dessus de $(\mathcal{C}_f)$ si et seulement si $x \geqslant 1$.

3. (a) $f'(x) = 2 + \frac{\frac{3}{x} * x^2 - 3\ln(x)(2x)}{x^4} = 2 + \frac{x(3 - 6\ln(x))}{x^4} = 2 + \frac{3 - 6\ln(x)}{x^3} = \frac{2x^3 + 3 - 6\ln(x)}{x^3} = \frac{g'(x)}{x^3}$

   (b) Puisque g' est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et x est positif sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que f' est positive également sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi le tableau de variations de f est donné par :

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

   (c) En gras, $(\mathcal{C}_f)$ et en pointillé $(\mathcal{A})$.



4. (a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\left]\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty,+\infty[$. Puisque $2n \in]-\infty,+\infty[$, l'équation $f(x) = 2n$ admet bien une et une seule solution sur $]0,+\infty[$.

   (b) Par définition, $f(x_n) = 2n$, $f(1) = 2$ et $f(n) = 2n + \dfrac{3\ln(n)}{n^2}$ donc $f(1) \leqslant f(x_n) \leqslant f(n) \Rightarrow 1 \leqslant x_n \leqslant n$ puisque f est strictement croissante.

   (c) $f(x_n) = 2n \Leftrightarrow 2x_n + \dfrac{3\ln(x_n)}{x_n^2} = 2n \underset{\div(2n)}{\Leftrightarrow} \dfrac{x_n}{n} + \dfrac{3\ln(x_n)}{2n(x_n)^2} = 1 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{x_n}{n} = \dfrac{3\ln(x_n)}{2n(x_n)^2}$

   (d) Comme on a $1 \leqslant x_n \leqslant n \Rightarrow \begin{cases} \ln(1) \leqslant \ln(x_n) \leqslant \ln(n) \\ n \leqslant n(x_n)^2 \leqslant n(n)^2 = n^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant \ln(x_n) \leqslant \ln(n) : (1) \\ \dfrac{1}{n^3} \leqslant \dfrac{1}{n(x_n)^2} \leqslant \dfrac{1}{n} : (2) \end{cases} \underset{(1)*(2)}{\Rightarrow}$ $0 \leqslant \dfrac{\ln(x_n)}{n(x_n)^2} \leqslant \dfrac{\ln(n)}{n}$.

   (e) D'après les croissances comparées, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ donc le théorème d'encadrement justifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(x_n)}{n(x_n)^2} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{x_n}{n}\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n} = 1$.

EXERCICE 3

I. Probabilités conditionnelles.

1. $P(D) = \dfrac{5}{100} = \dfrac{1}{20}$, $\quad P(\overline{D}) = 1 - P(D) = \dfrac{19}{20}$, $\quad P_D(\overline{A}) = \dfrac{90}{100} = \dfrac{9}{10}$, $P_D(A) = 1 - P_D(\overline{A}) = \dfrac{1}{10}$, $P_{\overline{D}}(A) = \dfrac{80}{100} = \dfrac{4}{5}$.

2. $P(A\cap D) = P(D)\,P_D(A) = \dfrac{1}{20} * \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{200} = 0,005$, $\quad P(A\cap\overline{D}) = P(\overline{D})\,P_{\overline{D}}(A) = \dfrac{19}{20} * \dfrac{4}{5} = \dfrac{19}{25} = 0,760$.

3. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(D, \overline{D})$, on obtient : $P(A) = P(A\cap D) + P(A\cap\overline{D}) = 0,765$.

4. Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle $P_A(D) = \dfrac{P(A\cap D)}{P(A)} = \dfrac{0,005}{0,765} \simeq 0,006$.

II. Loi binomiale.

1. On répète 10 fois la même expérience (« prélever un appareil »), chaque expérience étant indépendante l'une de l'autre, X représente le nombre de succès (« appareil sans défaut ») et la probabilité du succès est $p = 1 - \dfrac{5}{100} = \dfrac{95}{100}$ donc X suit la loi binômiale $\mathcal{B}(10,p)$ d'où $X(\Omega) = [\![0,10]\!]$, $\quad \forall k \in X(\Omega)$, $\quad P(X=k) = \dbinom{10}{k} p^k (1-p)^{10-k}$

2. Il s'agit de la probabilité $P(X=10)=p^{10}$.
3. Il s'agit de la probabilité $P(X \geqslant 1)=1-P(X=0)=1-p^{10}$.

III. Etude d'une densité de probabilité.

1. f est évidemment continue sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{t\to 0^-} f(t)=\lim\limits_{t\to 0^-} 0=0$, $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)=\lim\limits_{t\to 0^+}\left(2e^{-t}-2e^{-2t}\right)=2e^0-2e^0=0$Ainsi $\lim\limits_{t\to 0} f(t)=0$ et $f(0)=0$ d'où $\lim\limits_{t\to 0} f(t)=f(0)$ c'est-à-dire que f est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$.
2. Il est immédiat que $\forall t\leqslant 0,\quad f(t)=0\geqslant 0$. D'autre part, pour $t\geqslant 0$, on a $f(t)=2e^{-t}-2e^{-2t}=2\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)\geqslant 0 \Leftrightarrow e^{-t}-e^{-2t}\geqslant 0 \Leftrightarrow e^{-t}\geqslant e^{-2t} \Leftrightarrow -t\geqslant -2t \Leftrightarrow 2t-t\geqslant 0 \Leftrightarrow t\geqslant 0$ donc $f(t)\geqslant 0$ pour $t\geqslant 0$.
3. $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x\left(2e^{-t}-2e^{-2t}\right)dt=\left[-2e^{-t}+e^{-2t}\right]_0^x=-2e^{-x}+e^{-2x}+2-1=1+e^{-2x}-2e^{-x}$
4. D'après le calcul précédent, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt=1+0-2*0=1$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1.
5. La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f=\int_0^{+\infty} f$ converge et vaut 1 donc f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire T.

IV. Une variable à densité.

1. Puisque f est une densité de T, on a pour $x\in\mathbb{R}_+$,

$$F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)\,dt=\int_{-\infty}^0 \underbrace{f}_{=0}+\int_0^x f=1+e^{-2x}-2e^{-x}=1+\left(e^{-x}\right)^2-2e^{-x}=\left(1-e^{-x}\right)^2$$

2. Un calcul direct nous donne $F(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(1-e^{-x}\right)^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1-e^{-x}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. En effet, puisque x est positif, on a $e^{-x}\leqslant 1\Leftrightarrow 1-e^{-x}\geqslant 0$. Poursuivons le calcul :

$$1-e^{-x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow 1-\frac{1}{\sqrt{2}}=e^{-x}\Leftrightarrow -x=\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Leftrightarrow x=-\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

3. En suivant l'indication proposée, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^x tf(t)\,dt &= \int_0^x t\left(2e^{-t}-2e^{-2t}\right)dt=\left[t\left(-2e^{-t}+e^{-2t}\right)\right]_0^x-\int_0^x\left(-2e^{-t}+e^{-2t}\right)dt\\ &= x\left(-2e^{-x}+e^{-2x}\right)-\left[2e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^x=x\left(-2e^{-x}+e^{-2x}\right)-\left(2e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

4. D'après le calcul précédent, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x tf(t)\,dt=\frac{3}{2}$ (d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-2x}=0$) donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt=\int_0^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{3}{2}$. Par conséquent, T admet une espérance valant $\frac{3}{2}$.

RAPPORT

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et / ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un prérequis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Avec une moyenne de 10,1 et un écart-type de 5.7, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

COMMENTAIRES PARTICULIERS

EXERCICE 1

1. Bien traitée en général.
2. Les questions a), b) et c) (la récurrence) sont bien traitées par l'immense majorité des candidats. Par contre, le calcul de A^n fut moins bien réussi (soit les candidats ne l'effectuent pas, soit ils commettent des erreurs flagrantes).
3. (a) Un nombre très important de candidats pense que si $a \geqslant 4$ et $b \geqslant 4$ alors $\frac{a}{b} \geqslant \frac{4}{4} = 1$ ... ce qui est faux ! ($a = 4$, $b = 8$ par exemple) et assez peu pensent à étudier le signe de $\frac{a}{b} - 1$ ce qui fournit ici la réponse correcte. Ceci s'en ressent sur la réussite à cette question car moins de 15 % des candidats fournissent des éléments substantiels de réponse.

(b) La gestion parfois défaillante des règles de calculs algèbriques entraine que seul 40 % des candidats fournit une réponse correcte.

(c) Près de la moitié des candidats répond correctement, l'autre moitié ne semblant pas connaitre le théorème de convergence monotone.

(d) Si peu de candidats sont en mesure de justifier l'égalité proposée, il est surprenant de constater que la résolution de l'équation $L = \dfrac{3L+1}{L+3}$ pose problème à un nombre très important de candidats. Seuls les meilleurs candidats déterminent la valeur de L (par élimination correcte de la racine positive).

4. Si un candidat sur deux est en mesure de fournir des éléments significatifs de réponse aux questions a) et b), on observe trop de candidats écrire des égalités du type : $U_n = U_0 A^n$ ce qui n'a pas de sens.Pour la question c), seuls les meilleurs candidats répondent de façon satisfaisante.

EXERCICE 2

1. (a) Bien traitée en général.

   (b) Un nombre important de candidats tente d'appliquer un théorème de bijection pour montrer que l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution p alors que la résolution algèbrique de cette équation est immédiate : $x^3 = 1$ .. si on pense à simplifier ou à transformer l'expression $g'(x)$.

   (c) Beaucoup d'arguments fantaisistes sont proposés et seul un tiers des candidats fournit un argumentaire cohérent (avec les résultats obtenus précédemment) et correct.

2. Les calculs de limites manquent de justifications. La limite du quotient $\dfrac{\ln(x)}{x}$ en 0^+ est souvent fausse (égale à 0 ou à $+\infty$). L'équation de l'asymptote et sa position par rapport à la courbe sont obtenues par un nombre assez faible de candidats. Notons qu'une part importante de candidats confond le domaine d'existence de $\ln(x)$ $(x > 0)$ avec le signe de $\ln(x)$ ce qui explique l'apparition régulière dans les copies de la phrase : « $\ln(x) > 0$ quand $x > 0$ ».

3. (a) Bien traitée en général.

   (b) Trop de réponses sont erratiques et peu cohérentes. Seul la moitié des candidats réussit à répondre convenablement à cette question.

   (c) Assez peu de réponses convenables. En outre, certains graphes de droites sont faux (confusion entre les droites d'équation $y = 2x$ et $y = \dfrac{1}{2}x$ pour les tracés).

4. Les réponses à la question a) sont généralement partiels ou incomplets (20 % de réponses correctement argumentées). Pour les autres questions, elles sont traitées par les meilleurs candidats.

EXERCICE 3

I. Probabilités conditionnelles.

Les réponses des candidats sont globalement correctes à ces questions même si de trop nombreuses erreurs de calculs numériques sont encore présentes (gestion de somme ou quotient de fraction). Pour certains candidats, il y a une confusion entre la probabilité $P(A \cap D)$ et la probabilité conditionnelle $P_D(A)$.

II. Loi binomiale.

1. Bien traitée en général.
2. Un candidat sur deux fournit une réponse convenable. Un nombre important de candidats donne des réponses n'ayant pas de sens ou n'ayant pas suffisamment bien lu l'énoncé (il s'agit du nombre d'appareils sans défaut et non du nombre d'appareils avec défaut).
3. Beaucoup de candidats ont calculé la probabilité $P(X > 0)$ au lieu de la probabilité $P(X < 10)$ (car X désigne le nombre d'appareils SANS défaut et non avec défaut)

III. Etude d'une densité de probabilité.

1. Une part importante des candidats étudie la continuité sur $\mathbb{R}_-$ ou (généralement exclusif) sur $\mathbb{R}_+$ et peu de candidats pensent à étudier la continuité en 0. Au final, seul un candidat sur cinq répond complètement et convenablement à cette question.
2. Un nombre restreint de candidats justifie correctement la positivité de f sur $\mathbb{R}_+$, les candidats donnant des arguments d'évidence du type : « $e^{-t} > 0$, $e^{-2t} > 0$ donc $f(t) > 0$ » ce qui est manifestement faux !
3. Une primitive de $t \mapsto e^{-t}$ proposée par le candidat n'est pas toujours correcte (oubli du signe) mais celui de $t \mapsto e^{-2t}$ est faux presque une fois sur deux (confusion avec la dérivation).
4. Près de la moitié des candidats justifie à peu près l'existence de l'intégrale mais l'autre moitié ne traite pas la question ou ne fournit aucun élément substantiel à l'argumentaire. Si la valeur de l'intégrale fournit par le candidat est souvent juste, sa justification par le candidat s'obtient par des contorsions de raisonnements ou des « manipulations» audacieuses sur les calculs pour forcer l'apparition du résultat final escompté : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f = 1$.
5. Bien traitée en général même si beaucoup de candidats n'étudient pas $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f$.

IV. Une variable à densité.

Pour la question 1, la réponse étant donnée, il est attendu du candidat d'expliciter les différentes étapes du calcul. Les autres questions sont traitées significativement par les meilleurs candidats (un sur quatre).