ROYAUME DU MAROC
AGENCE NATIONALE de RÉGLEMENTATION des TÉLÉCOMMUNICATIONS
INSTITUT NATIONAL des POSTES et TÉLÉCOMMUNICATIONS

inpt

المملكة المغربية
الوكالة الوطنية لتقنين المواصلات
المعهد الوطني للبريد و المواصلات السلكية و اللاسلكية

CONCOURS D'ACCES EN DEUXIEME ANNEE DU CYCLE D'INGENIEURS D'ETAT DE L'INPT
15- 07 -2004

EPREUVE DE MATHEMATIQUES - INFORMATIQUE
DUREE : 3 HEURES

N.B.

L'épreuve comporte deux (2) parties, une partie mathématique et une partie informatique. Chaque partie devra être traitée sur des feuilles séparées.

- L'appréciation des copies tient compte de la rigueur, de la clarté des raisonnements et de la présentation.
- Encadrer vos résultats.
- Ecrire avec un stylo à bille ou à encre, bleu ou noir.

Partie Mathématiques

Exercice 1

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, vérifiant :

(i) $\exists\, \alpha > 0$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}^p,\ \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \alpha ||x - y||^2$

(ii) $\exists\, M > 0$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}^p,\ ||\nabla f(x) - \nabla f(y)|| \leq M ||x - y||$,

où $\nabla f(x)$, $\langle .,. \rangle$ et $||.||$ désignent respectivement le gradient de f en x, le produit scalaire euclidien et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^p$.

1) Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^p,\ f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{\alpha}{2} ||x - y||^2.$$

2) Montrer que f est strictement convexe et que $f(x) \to +\infty$ quand $||x|| \to +\infty$. En déduire qu'il existe un unique $x^* \in \mathbb{R}^p$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $f(x^*) \leq f(x)$

3) Soient $\rho \in]0, \frac{2\alpha}{M^2}[$ et $x_0 \in \mathbb{R}^p$. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $x_{n+1} = x_n - \rho \nabla f(x_n)$, est une suite de Cauchy. En déduire qu'elle converge vers x^*.

Exercice 2

1) Soient X_1, X_2, X_3 des variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, de densité donnée par

$$g(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \text{ si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Soit $X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}$ le réarrangement par ordre croissant des variables aléatoires X_1, X_2, X_3.

1.a) Montrer que la densité du vecteur aléatoire $(X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)})'$ est définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 6\lambda^3 e^{-\lambda(x_1+x_2+x_3)} \text{ si } (x_1, x_2, x_3) \in E \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

où $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ 0 < x_1 < x_2 < x_3\}$.

1.b) En déduire que les variables aléatoires $Y_1 = X_{(1)}$, $Y_2 = X_{(2)} - X_{(1)}, Y_3 = X_{(3)} - X_{(2)}$ sont indépendantes et que, pour $k = 1, 2, 3$, Y_k suit une loi exponentielle de paramètre $(4 - k)\lambda$.

2) *Application* : Quatre personnes A, B, C et D arrivent en même temps dans une téléboutique où il y a exactement trois cabines téléphoniques. Ces trois cabines sont occupées immédiatement par A, B et C. D remplace le premier sorti. A, B, C et D quittent la téléboutique aussitôt après avoir terminé leur communication. On désigne, respectivement, par X_1, X_2, X_3 et X_4 les variables aléatoires égales au temps d'occupation de la cabine par A, B, C et D. Ces variables sont supposées indépendantes, et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

2.a) Calculer la probabilité pour que D sorte le dernier de la téléboutique.

2.b) Donner la loi de probabilité du temps total T passé par D à la téléboutique, ainsi que le temps moyen passé par D à la téléboutique.

2.c) Donner la loi de probabilité de l'instant du dernier départ, l'instant 0 étant l'instant d'arrivée des quatre personnes à la téléboutique.

Exercice 3

Soit f une fonction continue, bornée, intégrable telle que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ soit aussi intégrable.

1.a) Peut-on appliquer le théorème de Fubini pour calculer $\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\mathrm{e}^{2i\pi xy}dy$?

1.b) Montrer qu'il suffit de vérifier que $g(0) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(y)dy$, où g est une fonction convenablement choisie, pour en déduire : $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\mathrm{e}^{2i\pi xy}dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

2) Soit h une fonction intégrable. Montrer que, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_{\mathbb{R}} f(\varepsilon t)\widehat{h}(t)dt = \int_{\mathbb{R}} h(\varepsilon t)\widehat{f}(t)dt.$$

3) En appliquant ce qui précède à une fonction h particulière dont on connaît la transformée de Fourier, établir la formule d'inversion :

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\mathrm{e}^{2i\pi xy}dy.$$

Partie Informatique

Préliminaires :

Pour écrire les algorithmes des exercices 1 et 2, vous pouvez utiliser les pseudo types et les pseudo instructions suivants :

Pseudo types :

- *Integer* est le type des entiers
- *Char* est le type des caractères
- *Boolean* est le type des éléments dont les valeurs possibles sont «True » ou « False »
- *Real* est le type des nombres réels
- *Tableau [1..N] of T* est le type d'un tableau de N éléments de type T.

Pseudo instructions

- **v : T** **déclare** que **v** est une variable de type **T**
- v **←val** **affecte** la valeur « val » à la variable déjà déclarée v.
- **Afficher(Expr)** **affiche** à l'écran la valeur de l'expression « Expr » (une expression peut être nombre ou une chaîne de caractères)
- **Lire(v)** **Lit** une valeur au clavier et l'affecte à la variable v.
- L'instruction conditionnelle **If** a la forme suivante :
  If (*expression booléenne*)
  Début
  ....
  Fin
  Else
  Début
  ....
  Fin
- La boucle **While** a la forme suivante :
  While (*expression booléenne)*
  Début
  ....
  Fin
- La boucle **For** a la forme suivante :
  For (i variant de Vi à Vf)
  Début
  ....
  Fin
  Remarque : Vi est la valeur initiale de i et Vf est sa valeur finale . La valeur de i s'incrémente de 1 après chaque itération

- /* Ceci est un commentaire */ Insère un commentaire

Remarque : Toute variable utilisée dans un algorithme doit être déclarée

EXERCICE 1 :

Soit T un tableau de 10 éléments réels strictement positifs. Ces éléments ne sont pas nécessairement distincts. En utilisant les pseudo types et les pseudo instructions définis plus haut , écrire un algorithme qui permet de:

- Lire au clavier les éléments du tableau T
- Afficher la valeur d'une variable réelle **Emax** contenant le plus grand élément du tableau T .
- Afficher les indices de **Emax** du tableau T.

Par exemple : Soit T le tableau suivant :

Elément	2.5	8	3	**9**	5.5	**9**	3	2	8	**9**
Indice	1	2	3	**4**	5	**6**	7	8	9	**10**

La variable Emax = 9
Les indices de Emax dans T sont : 4, 6 et 10

EXERCICE 2 :

En utilisant les pseudo types et les pseudo instructions définis en préliminaires, écrire un algorithme qui permet de :

- Lire au clavier une chaîne de caractères **Ch** (10 caractères au maximum)
  (Une chaîne de caractères sera considérée comme un tableau de caractères)
- Afficher la valeur d'une variable entière **N** contenant le nombre exact de caractères de la chaîne Ch. (La fonction **taille(Ch)** retourne le nombre exact de caractères de la chaîne de caractères **Ch**)
- Afficher si **Ch** est un palindrome ou non

Une chaîne de caractères est un palindrome si elle peut se lire de la même façon de droite à gauche que de gauche à droite. Ainsi, les chaînes ELLE, AZIZA, OMO sont des palindromes, alors que les chaînes ELLA, AMI ne sont pas des palindromes.

Exemple 1:

Lecture au clavier : Ch = AZIZA
Affichage : N=5
Affichage : La chaîne AZIZA est un palindrome

Exemple 2:

Lecture au clavier : Ch = ELLA
Affichage : N=4
Affichage : La chaîne ELLA n'est pas un palindrome