Exercice 1

I) Soit f et g deux fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \int_0^1 g(t)f(xt)dt.$$

I. 1. a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|h| < \alpha \implies \forall t \in [0,1], \quad |f(x_0t + ht) - f(x_0t)| < \varepsilon.$$

(On pourra utiliser la continuité uniforme de f sur tout intervalle compact).

I. 1. b) Montrer que la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$.

I. 2. a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|h| < \alpha \implies \forall t \in [0,1], \quad |f(x_0t + ht) - f(x_0t) - htf'(x_0t)| < \varepsilon|h|.$$

I. 2. b) Montrer que la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = \int_0^1 tg(t)f'(xt)dt.$$

I. 2. c) Montrer que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

II) Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ et F l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ définie par

$$\forall \psi \in \mathcal{E}, \quad F(\psi) = x\psi,$$

où $x\psi$ désigne la fonction $x \mapsto x\psi(x)$.

II. 1) Montrer que F est un endomorphisme de $\mathcal{E}$, injectif et non surjectif.

II. 2) Soit $\psi \in \mathcal{E}$, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \psi(0) + x\int_0^1 \psi'(tx)dt.$$

II. 3) On désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions $\psi \in \mathcal{E}$ telles que $\psi(0) = 0$. Montrer que $\mathcal{H}$ est l'image de $\mathcal{E}$ par F.

II. 4) Soit f un élément de $\mathcal{E}$ qui n'appartient pas à $\mathcal{H}$. On désigne par $\mathcal{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ engendré par f. Montrer que $\mathcal{E} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{F}$.

Exercice 2

Soit E un espace euclidien de dimension finie n ($n \geq 1$). Pour tout x, y de E, le produit scalaire de x et y sera noté $(x\,|\,y)$ et la norme sera notée $||x|| = \sqrt{(x\,|\,x)}$. Soit u un endomorphisme symétrique de E, non nul, de valeurs propres (distinctes ou non, mais nécessairement réelles) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, rangées dans l'ordre croissant ($\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$). Soit enfin $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.

1) a) Montrer que pour tout vecteur x de E, on a : $\lambda_1||x||^2 \leq (u(x)\,|\,x) \leq \lambda_n||x||^2$.

1) b) Pour quels vecteurs x l'une des deux inégalités ci-dessus est-elle une égalité ?

2) On suppose ici que la matrice $M = (m_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ de u pour la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ vérifie :

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \quad m_{ij} \geq 0.$$

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ un vecteur propre unitaire associé à la plus grande valeur propre λ_n. On lui associe $x^* = \sum_{i=1}^{n} |x_i| e_i$.

Montrer que $u(x^*) = \lambda_n x^*$ et que $\lambda_n > 0$.

3) Soit A une matrice quelconque à n lignes et n colonnes, à coefficients réels. On pose $S = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$ (${}^tA$ dénote la transposée de A). On note α_1 (resp. α_n) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de S. Montrer que si A admet des valeurs propres réelles, elles appartiennent nécessairement à l'intervalle $[\alpha_1, \alpha_n]$. Qu'en déduit-on lorsque A est antisymétrique ?

Exercice 3

1) Soit $a_0 = 1$ et pour n entier strictement positif,

$$a_n = \frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n+1)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

A l'aide de la formule de Stirling

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi},$$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\sqrt{n}$ et en déduire la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_n(2n+1)^2}$.

2) Déterminer, I, l'ensemble des points réels x tels que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ converge.

Montrer que cette série converge normalement sur I et que sa somme $F(x)$ est une fonction continue sur I.

3) a) Montrer que pour tout $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on a :

$$\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_n} \frac{(\sin\theta)^{2n+1}}{(2n+1)^2}.$$

3) b) En admettant la formule de Wallis $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2n+1} d\theta$, calculer

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

4) Soit $B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Montrer que $B - A = \frac{B}{4}$ et trouver B.

5) On définit, pour tout n entier strictement positif, la fonction u_n sur $[0,1]$ par $u_n(0) = 0$ et pour $t \in]0,1]$, $u_n(t) = -\frac{1}{n} t^n \ln t$.

Pour quelle valeur de $t \in [0,1]$ la fonction u_n atteint elle son maximum ? Quel est ce maximum ?

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge normalement sur $[0,1]$ et calculer sa somme.

6) En déduire que

$$\int_0^1 \ln t \, \ln(1-t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}.$$

7) En utilisant ce qui précède calculer $\int_0^1 \ln t \, \ln(1-t) dt$.