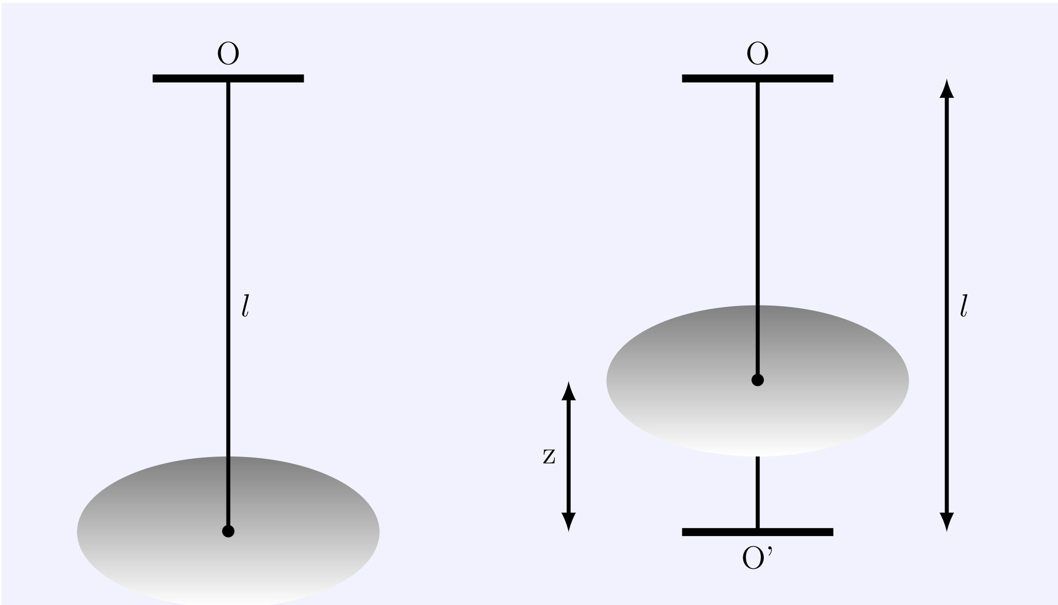
# Problèmes de synthèse

**Exercice 1 :**
Un pendule de torsion est constitué par un fil métallique vertical de longueur $l = 0,50m$ , fixé à l'une des extrémités un disque horizontal , homogène de moment d'inertie par rapport à son axe $\Delta$, $J_\Delta = 5 \times 10^{-5} kg.m^2$ . L'autre extrémité du fil est étant fixé à un point $O_1$ . Le système (disque+fil) peut tourner autour d'un axe fixe ($\Delta$) matérialisé par le fil métallique et qui passe par le centre d'inertie du disque .

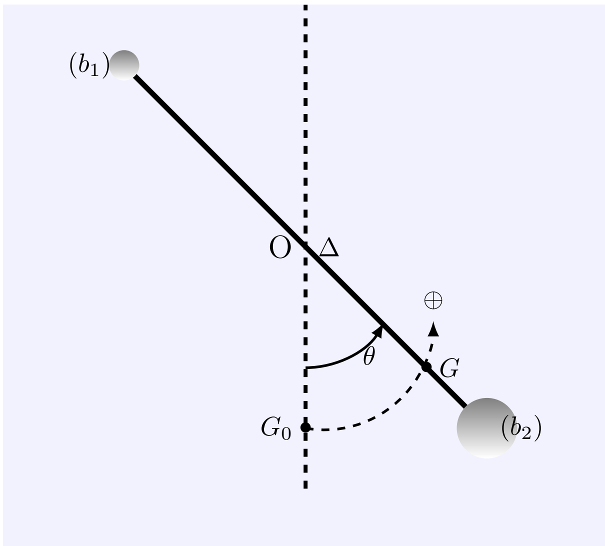



1. Déterminer la nature du mouvement du disque dans le plan horizontal
2. Calculer la constante de torsion C si la période propre $T_0 = 0,92s$
3. Que devient cette période si la longueur est divisée par deux ?
4. Les extrémités supérieure et inférieur du fil étant immobiles , on fixe le disque du pendule tel que son centre d'inertie se trouve à une distance z du point O' du fil . On néglige l'épaisseur du disque devant z . Les deux brins de fil ont une torsion nulle . L'axe de rotation du pendule est vertical .
   (a) Déterminer la nature du mouvement de nouveau pendule et trouver la période $T'_0$ en fonction de $T_0$ , $l$ et $z$ sachant que la constante de torsion d'un fil est inversement proportionnelle à sa longueur , si le fil est homogène et de section constante .
   (b) Calculer $T'_0$ . On donne $z = \dfrac{l}{3}$
   (c) Montrer que la période $T'_0$ prend une valeur maximale $T'_{max}$ lorsque $z$ est égale une valeur $z_m$. Calculer $z_m$ et déduire la valeur de $T'_{max}$.

**Exercice 2 :**
Pour réaliser un pendule pesant , on fixe deux boules $b_1$ et $b_2$ ponctuelles de masses $m_1 = 50g$ et $m_2 = 4m_1$ aux bouts d'une tige homogène de masse négligeable et de longueur

$2l = 0,4m$ qui peut tourner autour d'un axe horizontal fixe $(\Delta)$ passant par son milieu O . La position d'équilibre stable du pendule pesant est lorsque le centre de gravité du système se coïncide avec $G_0$ . On écarte le pendule de sa position d'équilibre stable d'un angle très petit $\theta_m = \dfrac{\pi}{20} rad$ et on l'abandonne sans vitesse initiale .

On repère à chaque instant la position du pendule par son abscisse angulaire $\theta = \widehat{\left(\overrightarrow{OG_0}, \overrightarrow{OG}\right)}$ voir figure .
Le moment d'inertie du système par rapport à l'axe $(\Delta)$ est $J_\Delta = (m_1 + m_2)l^2$.




1. En utilisant la relation barycentrique , montrer que le centre de gravité du pendule pesant est :
$$OG = \frac{3}{5}l$$
2. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique au pendule pesant ,montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit sous la forme suivante :
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3g}{5l}\theta = 0$$
Quelle est la nature du mouvement de G ?
3. La solution de l'équation différentielle est la suivante $\theta(t) = \theta_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi_0\right)$ , Déterminer l'expression de la période propre $T_0$ des oscillations en fonction de $l$,g . calculer $T_0$.
4. On considère l'instant où le pendule passe par sa position d'équilibre stable avec une vitesse positive comme origine des date. Écrire l'expression de l'équation horaire $\theta(t)$ en fonction du temps .
5. Soit $\overrightarrow{R_T}$ la composante tangentielle et $\overrightarrow{R_N}$ la composante normale de la réaction $\overrightarrow{R}$ appliquée par l'axe $(\Delta)$ à la tige .
   (a) En appliquant la deuxième loi de Newton, déterminer , en fonction de $m_1$ , $m_2$ , g , et $\theta_m$ les expressions de $\overrightarrow{R_T}$ et $\overrightarrow{R_N}$ , lorsque la tige est en position où $\theta = \theta_m$
   (b) En déduire l'intensité de la réaction $\overrightarrow{R}$ .

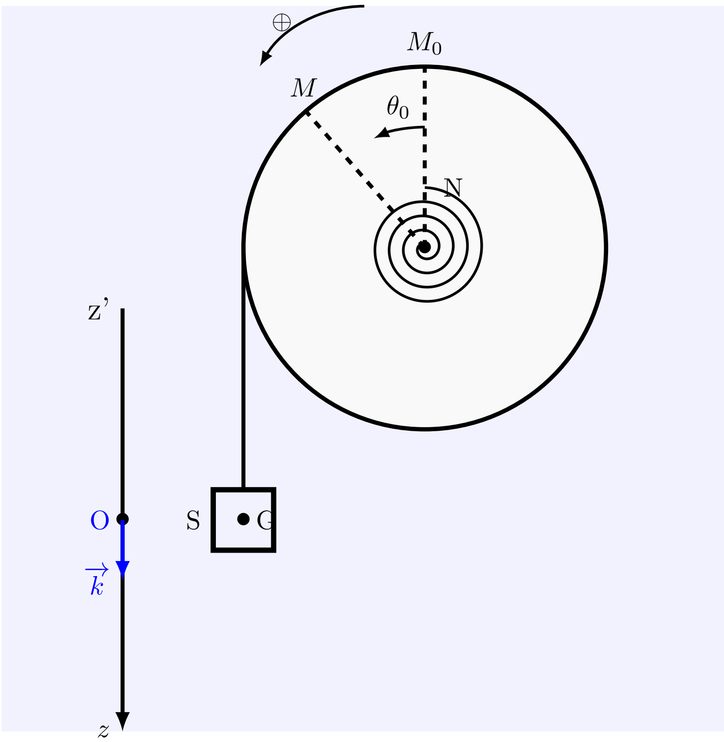
**Exercice 3 :**

Sur un disque homogène de rayon $r = 10cm$ soudé au son centre d'inertie à une tige cylindrique de masse négligeable et qui peut tourner autour d'un axe horizontal fixe et confondu avec l'axe du tige . Le moment d'inertie du disque est $J_\Delta = 2,50kg.m^2$ , on entoure un fil dont lextimité libre supporte une masse $m = 42kg$. On fixe sur l'axe du disque l'extrémité d'un ressort spiral de masse négligeable , l'autre extrémité N étant liée à un support fixe .

Lorsque le ressort spirale n'est pas déformé, l'abscisse angulaire est nul ($\theta = 0$)

À l'équilibre, Le centre d'inertie du corps de masse m se coïncide avec l'origine O de l'axe verticale $(O, \overrightarrow{k})$ et l'angle de rotation du disque est $\theta_0$

Le cylindre s'écarte de sa position d'équilibre d'un angle $\theta$, est soumis de la part du ressort à un couple de torsion, de moment $\mathscr{M}_c = -C.\theta$ avec $C = 12N.m/rad$




1. Écrire une équation donnant $\theta_0$ , angle correspondant à la position d'équilibre du système
2. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique système ,montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{C}{J_\Delta + mr^2}\theta = 0$$

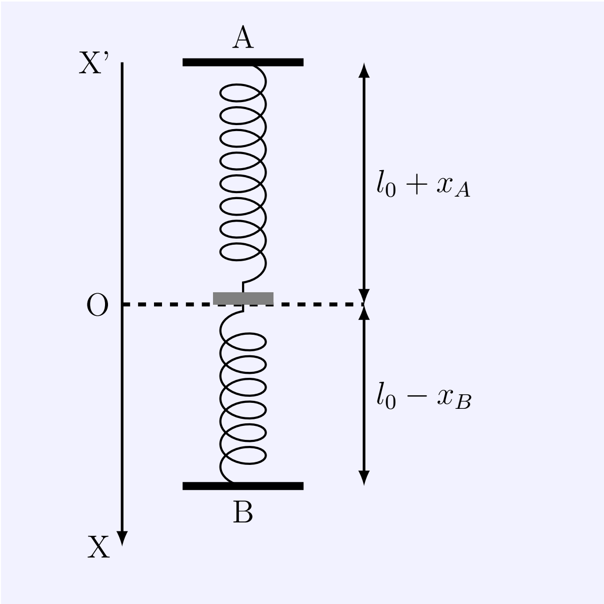
3. La solution de l'équation différentielle est la suivante $\theta(t) = \theta_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi_0\right)$ , Déterminer l'expression de la période propre $T_0$ des petites oscillations . Calculer sa valeur.

**Exercice 4 :**

Deux ressorts identiques de longueur $l_0$ , de raideur K , sont tendus entre deux points A

et B distant de $L$. Un disque D, de masse M et d'épaisseur négligeable , est fixé entre ces ressorts . voir figure .
On donne : $L = 45cm$ ; $l_0 = 15cm$ ; $K = 20N/m$ ; $g = 10m/s^2$ et $M = 0,1kg$

1. Déterminer la position d'équilibre du disque en déterminant $x_A$ et $x_B$
2. Le disque est écarter de sa position d'équilibre verticalement , vers le bas de $d = 3cm$ et abandonné sans vitesse initiale .
   a. Par une étude dynamique , donner l'équation différentielle du mouvement du disque ( on choisira l'axe $XX'$ comme sur la figure , son origine coïncidant avec la position d'équilibre )
   b. En déduire l'équation horaire du mouvement de D
3. Retrouver l'équation horaire par une étude énergétique .

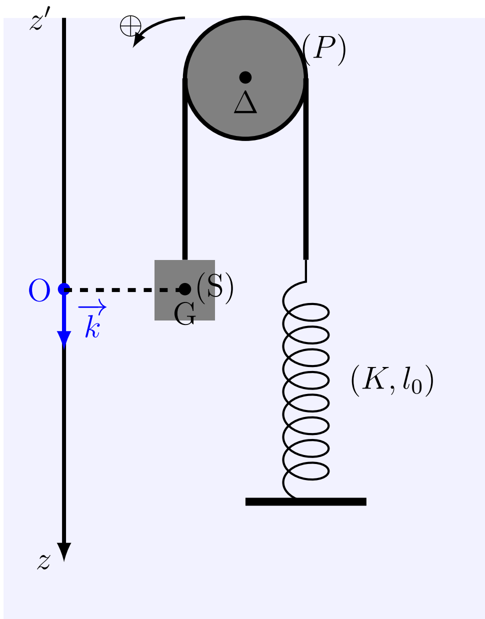



**Exercice 5 : influence de la température et la longueur sur la période d'un pendule ****
Un pendule est constitué par un tige métallique OA , de masse négligeable mobile autour d'un axe horizontal perpendiculaire à la tige passant par O . Sur l'extrémité A , on fixe une masse M supposée ponctuelle . Ce pendule est assimilable à un pendule simple de longueur $OA = l$, il effectue des oscillations de faible amplitude. Le pendule battant le seconde à $0°C$ ($T_0 = 2s$) en un lieu où $g_0 = 9,8m/s^2$.
1. Calculer la longueur $OA = l_0$ à cette température .
2. La température s'élève à $20°C$. Quelle variation relative $\dfrac{\Delta T}{T_0}$ du pendule en résulte-t-il sachant que le cœfficient de dilatation linéaire de la tige qui soutient la masse M est $\lambda = 1,85 \times 10^{-5} S.I$ .
On donne la relation des dilatation des solide en fonction de la température en $°C$ est :

$$l = l_0(1 + \lambda.\theta$$

avec $l_0$ la longueur de la tige à la température $\theta°C$ et pour $\varepsilon << 1$ , nous avons l'approximation suivante : $(1+\varepsilon)^n \approx 1+n.\varepsilon$
3. Ce pendule constitue le balancier d'une horloge dont la marche est exacte à $0°C$ (bat la seconde ). Cette horloge avance -t-elle ou retarde-t-elle lorsque la température s'élève à $20°C$ ? de combien dans un jour ?
4. À la température $20°C$ la longueur de la tige est $l$, on fixe une petite masse ponctuelle m au milieu de la tige . Calculer la nouvelle période de ce pendule composé en fonction de $l$,M,m et g .
On rappelle que le moment d'inertie d'une masse ponctuelle m distant de l'axe de rotation de d est $J_\Delta = md^2$
Montrer que la présence de m diminue la période propre du pendule .
5. Quelle doit être la valeur de m pour que le pendule ainsi modifié bat rigoureusement la seconde à $20°C$

**Exercice 6 : détermination du moment d'inertie d'un cylindre d'une poulie homogène (P)**
Le but de cet exercice est de déterminer le moment d'inertie $J_\Delta$ d'un cylindre d'une poulie homogène de rayon $r = 0,15m$ qui peut tourner autour de son axe $\Delta$ fixe .
On considère un ressort à spire non jointif de masse négligeable et de raideur $K$ et sa longueur initiale est $l_0 = 0,2m$.
On relie l'extrémité mobile du ressort à un corps solide (S) de masse $m = 0,3kg$ par un fil inextensible et de masse négligeable passant par la gorge de la poule (P) sans glissement .




1. À l'équilibre la longueur finale du ressort est $l = 0,25m$ , déterminer l'expression du raideur du ressort et calculer sa valeur . 2. On écarte le corps (S) de sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale .
2.1 En faisant une étude dynamique sur le système mécanique , établir l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie de (S) .
2.2 Déterminer l'expression du moment d'inertie de la poulie (P) $J_\Delta$ en fonction de m,r,K et la période propre T des oscillations . 2.3 Calculer $J_\Delta$ sachant que la période propre $T = 0,49s$.