Le PRODUIT VECTORIEL

1) ORIENTATION DE L'ESPACE

L'espace ($\mathscr{E}$) est muni d'un repère $\left(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ orthonormé et $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ la base qui lui est associée.

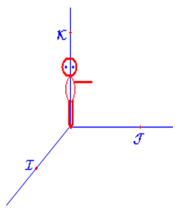
On pose un observateur (imaginaire) sur l'axe $[Oz)$ et il regarde vers l'axe $[ox)$; On aura deux positions pour l'axe $[Oy)$:

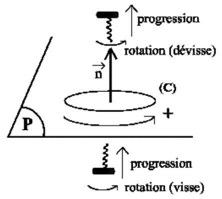
1er cas : $[Oy)$ est à la droite de l'observateur

On dit que la base $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ est **indirecte** de même pour le Repère $\left(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

2eme cas : $[Oy)$ est à la gauche de l'observateur

On dit que la base $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ est **directe** de même pour le Repère $\left(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$





2)DEFINITION DU PRODUIT VECTORIEL.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans $\mathcal{V}3$.

Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ tel que

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires

Le vecteur $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ est tel que :

$\vec{w}\perp\vec{u}$ et $\vec{w}\perp\vec{v}$ et la base $\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)$ est directe

Et $\|\vec{w}\|=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\sin\theta$ ou $\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)=\theta$

Remarque :si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

Soit A un point dans l'espace ; ils existent deux points dans l'espace B et C tels que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$,les points A, B et C étant non alignés, ils définissent un plan (P) dans l'espace ($\mathscr{E}$).

Et $\vec{w}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normale au plan(P) *(utilisable pour déterminer l'Equation cartésienne d'un plan.)*

3) Propriétés :

1) $\vec{u}\wedge\vec{u}=\vec{0}$

2) $\vec{v}\wedge\vec{u}=-\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)$

3) $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\wedge\vec{w}=\left(\vec{u}\wedge\vec{w}\right)+\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right)$

$\vec{u}\wedge\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\left(\vec{u}\wedge\vec{w}\right)+\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right)$

$\left(\lambda\vec{u}\right)\wedge\vec{v}=\lambda\left(\vec{u}\wedge\vec{w}\right)=\vec{u}\wedge\left(\lambda\vec{v}\right)$

4)Soient A, B et C trois points non alignés on a $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$: est la surface du parallélogramme $ABA'C$

5) Soient A, B et C trois point non alignés, la surface du triangle ABC est : $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

6)A, B et C sont alignés si et seulement ssi $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

4)L'EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT VECTORIEL

Soient B$\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$une base orthonormée directe de $\mathcal{V}3$, et deux vecteurs $\vec{u}\left(x;y;z\right)$ et $\vec{u'}\left(x';y';z'\right)$ on a :

$$\vec{u}\wedge\vec{u'}=\begin{vmatrix}\cancel{x} & \cancel{x'}\\ y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x & x'\\ \cancel{y} & \cancel{y'}\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\\ \cancel{z} & \cancel{z'}\end{vmatrix}\vec{k}$$

Exemple : $\vec{u}\left(1;1;1\right)$ et $\vec{v}\left(2;1;2\right)$ deux vecteurs:

Calculer : $\vec{u}\wedge\vec{v}$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}-0\vec{j}-\vec{k}=\vec{i}-\vec{k}$$

5) Intersection de deux plans

Soient (P) et (Q) deux plan dans l'espace où $\vec{n}$ est un vecteur normal sur (P) et $\vec{m}$ est un vecteur normal sur (Q), si $\vec{n}$ et $\vec{m}$ sont non colinéaires alors (P) et (Q) se coupent selon une droite (Δ) dirigée par $\vec{n}\wedge\vec{m}$

6) Distance d'un point par rapport à une droite.

Soient $D\left(A;\vec{u}\right)$: une droite dans l'espace et M un point ; la distance du point M à la droite (D) est/

$$d\left(M;(D)\right)=MH=\frac{\left\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$$

(Cette propriété reste vraie si $M\in(D)$)

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien