

Le PRODUIT VECTORIEL

I) ORIENTATION DE L'ESPACE

1) Le bonhomme d'Ampère

L'espace (\mathcal{E}) est muni d'un repère $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

orthonormé et $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ la base qui lui est

associée.

On pose un observateur (imaginaire) sur l'axe $[Oz]$ et il regarde vers l'axe $[Ox]$; On aura deux positions pour l'axe $[Oy]$:

1er cas : $[Oy]$ est à la droite de l'observateur

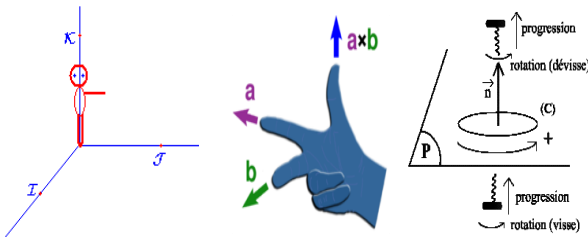
On dit que la base $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est **indirecte** de

même pour le Repère $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

2eme cas : $[Oy]$ est à la gauche de l'observateur

On dit que la base $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est **directe** de même

pour le Repère $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$



2) Remarques

1) Soit $B(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ une base **directe**.

Les bases : $(\vec{i}; \vec{k}; \vec{j})$; $(\vec{k}; \vec{j}; \vec{i})$; $(\vec{j}; \vec{i}; \vec{k})$ obtenues par la permutation de deux vecteurs sont des bases indirectes.

2) Les bases $(-\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$; $(\vec{i}; -\vec{j}; \vec{k})$; $(\vec{i}; \vec{j}; -\vec{k})$ sont des bases indirectes

3) Les bases : $(\vec{j}; \vec{k}; \vec{i})$; $(\vec{k}; \vec{i}; \vec{j})$ obtenues par une rotation circulaire, sont des bases directes.

4) Soit $B(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ une base **directe**, $B'(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ une autre base de \mathcal{V}_3 ; la base B' est directe si et seulement si $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) > 0$

II) DEFINITION DU PRODUIT VECTORIEL.

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs dans \mathcal{V}_3 .

Le produit vectoriel des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que

• Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires alors : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

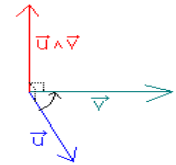
• Si \vec{u} et \vec{v} sont non colinéaires

alors Le vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

est tel que :

$\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$ et la base

$(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ est directe



Et $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \theta$ ou $(\vec{u}; \vec{v}) = \theta$

Exemple : \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs tels que :

$\|\vec{u}\| = 1$ et $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$

Calculer : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \theta = 1 \cdot 3 \sin \frac{\pi}{3} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Remarque : On suppose que \vec{u} et \vec{v} sont non colinéaires.

Soit A un point dans l'espace; ils existent deux points dans l'espace B et C tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, les points A, B et C étant non alignés, ils définissent un plan (P) dans l'espace (\mathcal{E}) .

Et $\vec{w} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normale au plan (P)

III) PROPRIETES DU PRODUIT VECTORIEL

1) Propriétés :

1) $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$

2) Le produit vectoriel est antisymétrique :

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$$

3) Le produit vectoriel est bilinéaire :

$$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$$

$$(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v})$$

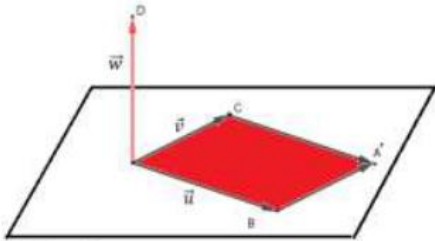
2) Interprétation géométrique : Surface d'un triangle.

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs dans \mathcal{V}_3 , qu'on suppose non colinéaires

tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ on a d'après la

Définition du produit vectoriel :

$AD = AB \times AC \times \sin \alpha$ où α la mesure de l'angle BAC



D'autre part, la surface du triangle ABC est :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times BH$$

et on a : $\sin \alpha = \frac{BH}{AB}$ donc : $BH = AB \sin \alpha$ et par

suite :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times AB \times \sin \alpha$$

et donc $AD = 2S_{ABC} = S_{ABCD}$

Propriété 1: Soient A, B et C trois points non alignés on a $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$: est la surface du parallélogramme $ABA'C$

Propriété 2 : Soient A, B et C trois points non alignés, la surface du triangle ABC est :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$$

IV) L'EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT VECTORIEL

Soit $B(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ une base orthonormée directe de \mathcal{V}_3 ,

Considérons deux vecteurs $\vec{u}(x; y; z)$ et

$\vec{u}'(x'; y'; z')$ dans l'espace vectoriel \mathcal{V}_3 on a

donc : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{u}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

par suite :

$$\vec{u} \wedge \vec{u}' = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$$

$$\vec{u} \wedge \vec{u}' = xx'(\vec{i} \wedge \vec{i}) + xy'(\vec{i} \wedge \vec{j}) + xz'(\vec{i} \wedge \vec{k}) +$$

$$+ yx'(\vec{j} \wedge \vec{i}) + yy'(\vec{j} \wedge \vec{j}) + yz'(\vec{j} \wedge \vec{k}) +$$

$$+ zx'(\vec{k} \wedge \vec{i}) + zy'(\vec{k} \wedge \vec{j}) + zz'(\vec{k} \wedge \vec{k})$$

On a : $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0}$ et $\vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{0}$ et $\vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$ et $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$

et $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ et $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$

$$\vec{u} \wedge \vec{u}' = xx'\vec{0} + xy'\vec{k} - xz'\vec{j} +$$

$$-yx'\vec{k} + yy'\vec{0} + yz'\vec{i} + zx'\vec{j} - zy'\vec{i} + zz'\vec{0}$$

D'où :

$$\vec{u} \wedge \vec{u}' = (yz' - zy')\vec{i} - (xz' - zx')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}$$

Propriété : Soient $B(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ une base

orthonormée directe de \mathcal{V}_3 , et deux vecteurs

$\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{u}'(x'; y'; z')$ on a :

$$\vec{u} \wedge \vec{u}' = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{k}$$

Exemple 1 : $\vec{u}(1; 1; 1)$ et $\vec{v}(2; 1; 2)$ deux vecteurs:

Calculer : $\vec{u} \wedge \vec{v}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} - 0\vec{j} - \vec{k} = \vec{i} - \vec{k}$$

Exemple 2 : $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$

Calculer : $\vec{u} \wedge \vec{v}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{j} - 8\vec{k}$$

V) APPLICATIONS.

1) Alignement de 3 points.

Propriété : Soient A, B et C trois points dans l'espace, A, B et C sont alignés si et seulement si \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires ce qui est équivalent à $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

2) Equation d'un plan.

Soient A, B et C trois points non alignés dans

l'espace, le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal

Au plan (ABC) donc :

$$M(x, y, z) \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$$

Cette équivalence détermine l'équation cartésienne du plan (ABC)

Exemple : dans l'espace muni d'un repère

orthonormée directe $(\vec{0}; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ on considère les

points $A(0; 1; 2)$ et $B(1; 1; 0)$ et $C(1; 0; 1)$

1) Déterminer les coordonnées du vecteur

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et vérifier que les points

A et B et C sont non alignés

2) Calculer la surface du triangle ABC

3) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

Solution :1) $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

$\overrightarrow{AB}(1;0;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(1;-1;-1)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = -2\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k}$$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ Donc les points A et B et C sont non alignés

$$2) S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$$

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\text{Donc : } S_{ABC} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

3) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -2\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k}$ un vecteur normal du plan ABC

Donc une équation cartésienne du plan ABC est de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-2;-1;-1)$ donc $a = -2$ et $b = -1$ et $c = -1$

$$\text{Donc : } -2x - 1y - 1z + d = 0 \text{ (ABC)}$$

Et on a : $A(0;1;2) \in (P)$ donc : $0 - 1 - 2 + d = 0$

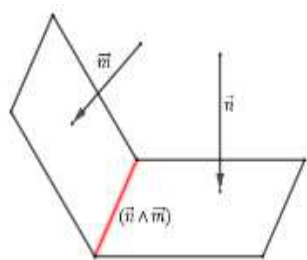
donc $d = 3$

$$\text{Donc (ABC) : } -2x - 1y - 1z + 3 = 0$$

$$\text{Donc (ABC) : } 2x + y + z - 3 = 0$$

3) Intersection de deux plans

Soient (P) et (Q) deux plan sécants dans l'espace suivant une droite (Δ), Soient \vec{n}



un vecteur normal sur (P) et \vec{m} un vecteur normal sur (Q)

Si \vec{u} est un vecteur directeur de (Δ) alors : $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{m} \cdot \vec{u} = 0$ et on sait que :

$$\vec{m} \cdot (\vec{n} \wedge \vec{m}) = \vec{n} \cdot (\vec{n} \wedge \vec{m}) = 0 \text{ on en déduit que } \vec{u} \text{ et } \vec{n} \wedge \vec{m}$$

sont colinéaires et par

suite $\vec{n} \wedge \vec{m}$ est un vecteur directeur de (Δ)

Propriété : Soient (P) et (Q) deux plan dans l'espace où \vec{n} est un vecteur normal sur (P) et \vec{m} est un vecteur normal sur (Q), si \vec{n} et \vec{m} sont non colinéaires alors (P) et (Q) se coupent selon une droite (Δ) dirigée par $\vec{n} \wedge \vec{m}$

Exemple : L'espace est muni d'un repère orthonormé

Quelle est l'intersection des plans d'équations respectives

$$(P) x - y + 2z + 1 = 0 \text{ et } (P') 2x + y - z + 2 = 0$$

Solution : $\vec{n}(1;-1;2)$ et $\vec{n}'(2;1;-1)$ deux vecteurs

normaux respectivement de (P) et (P')

$$\text{On a : } \vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n}' = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\text{Donc : } \vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n}' = -\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k} \neq \vec{0}$$

les plans (P) et (P') sont sécants suivant une droite (D)

et $\vec{u}(-1;5;3)$ est un vecteur directeur de (D)

et la droite (D) passe par $A(-1;5;3)$ (il suffit de donner par exemple $z = 0$ et résoudre le système et calculer x et y)

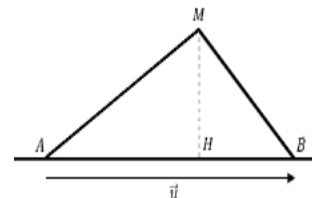
Donc : une représentation paramétrique de

$$(D) \text{ est } (D) : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 5t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

4) Distance d'un point par rapport à une droite.

Soit $D(A; \vec{u})$: la droite

qui passe par A et de vecteur directeur \vec{u} et M un point dans l'espace.



• Si $M \in (D)$ alors $d(A; (D)) = 0$

• Si $M \notin (D)$ on pose : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

Soit H la projection orthogonale de M sur la droite (D). on a :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} MH \times AB =$$

$$\text{On en déduit que : } d(M; (D)) = MH = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{AB}$$

Propriété : Soient $D(A; \vec{u})$: une droite dans l'espace et M un point ; la distance du point M à la droite (D) est $d(M; (D)) = MH = \frac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{u}\|}$

(Cette propriété reste vraie si $M \in (D)$)

Exemple : L'espace est muni d'un repère orthonormé

calculer la distance du point $M(-1;0;1)$ à la droite (D) dont une représentation

paramétrique est : $(D) : \begin{cases} x = -1+t \\ y = 5t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Solution : la droite (D) passe par : $A(1;-1;0)$

et $\vec{u}(2;-1;2)$ est un vecteur directeur de (D)

et $\vec{AM}(-2;1;1)$

$$\vec{AM} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$$

Donc : $\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{4+1+4} = 3$

Donc : $d(M;(D)) = \frac{3\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}$

Exercice : soit ABCDEFGH un cube dans l'espace orienté muni d'un repère orthonormé directe $(A; \vec{AB}; \vec{AC}; \vec{AE})$

Soit I milieu du segment $[EF]$ et K centre de gravité du carré ADHE

1)a) Montrer que $\vec{BK} = \vec{IG} \wedge \vec{IA}$

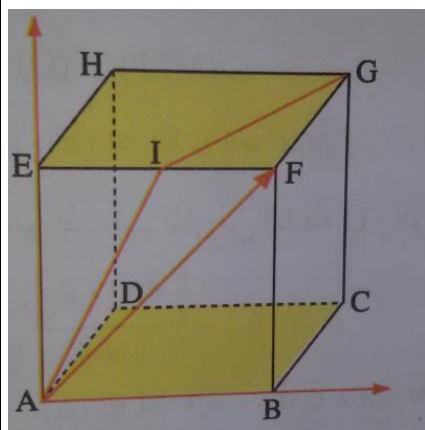
b) En déduire la surface du triangle IGA

2) on suppose que ABCD est un quadrilatère convexe de diagonales qui se coupent en T et soit Ω un point tel que : $\vec{D\Omega} = \vec{BT}$

2)a) comparer les distances : BD et ΩT et comparer la surface des triangles ABD et $A\Omega T$

2)b) Montrer que $\vec{AC} \wedge \vec{A\Omega} = \vec{AC} \wedge \vec{BD}$

Solution : 1) a) dans le repère $(A; \vec{AB}; \vec{AC}; \vec{AE})$



On a : $A(0;0;0)$ et $B(1;0;0)$ et $D(0;1;0)$ et

$E(0;0;1)$ et $F(1;0;1)$

et $G(1;1;1)$ et $H(0;1;1)$ et $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ et

$K\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

donc : $\vec{BK}\left(-1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $\vec{IG}\left(\frac{1}{2};1;0\right)$ et $\vec{IA}\left(-\frac{1}{2};0;-1\right)$

$$\vec{IG} \wedge \vec{IA} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{AB} - \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{AD} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{AE}$$

$\vec{IG} \wedge \vec{IA} = -\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AE}$ cad $\vec{IG} \wedge \vec{IA}\left(-1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Donc : $\vec{BK} = \vec{IG} \wedge \vec{IA}$

b) $S_{IGA} = \frac{1}{2} \|\vec{IG} \wedge \vec{IA}\| = \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

2)a) on a : $\vec{BD} \vec{D\Omega} = \vec{BT}$ donc $BT\Omega D$ est un parallélogramme donc : $\vec{\Omega T} = \vec{DB}$

Donc $\Omega T = DB$

Soit M la projection orthogonal de A sur la droite (BD) donc (AM) c'est la hauteur des deux triangles ABD et $A\Omega T$ donc :

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AM \times BD \text{ et } S_{A\Omega T} = \frac{1}{2} AM \times \Omega T$$

Et puisque : $\Omega T = DB$ alors $S_{A\Omega T} = S_{ABD}$

2)b) Montrons que $\vec{AC} \wedge \vec{A\Omega} = \vec{AC} \wedge \vec{BD}$

$$\vec{AC} \wedge \vec{A\Omega} = \vec{AC} \wedge (\vec{AT} + \vec{T\Omega}) = \vec{AC} \wedge \vec{AT} + \vec{AC} \wedge \vec{T\Omega}$$

On a : $\vec{AC} \wedge \vec{AT} = \vec{0}$ car les points A et C et T sont alignés

$$\vec{AC} \wedge \vec{A\Omega} = \vec{AC} \wedge \vec{BD} \text{ (car } \vec{T\Omega} = \vec{BD} \text{)}$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

