LIMITE ET CONTINUITE

I)LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT COMPLEMENTS (limite à droite et à gauche et opérations sur les limites)

1)Rappelles :

Soient P et Q deux fonction polynôme et $x_0 \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$ alors :

1) $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ si $Q(x_0) \neq 0$

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$ 4) $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$

5) $\lim\limits_{x \to x_0} \tan x = \tan x_0$ si $x_0 \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

5) $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ si $x_0 \geq 0$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ 7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{ax} = 1$ 9) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan ax}{ax} = 1$

10) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

Limite de la somme

lim f	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
lim g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
lim f+g	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme ind

Ces propriétés sont vraies si x tend vers $a+$; $a-$; $+\infty$ ou $-\infty$

Limites des produits

lim f	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
lim g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
lim f×g	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme ind	Forme ind	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Limites des inverses

lim f	$\ell \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \dfrac{1}{f}$	$\dfrac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

Limites des quotients

lim f	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
lim g	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	ℓ	0	$\pm\infty$
$\lim \dfrac{f}{g}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	?	?

2)Exercices : RAPPELLES

Exercice1 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1}$ 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}$ 4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x} - x$ 6) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x - 1}{x - \dfrac{\pi}{4}}$

Solutions :1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1} = \dfrac{3}{1} = 3$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-7x^4}{14x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x}{2} = -\infty$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x^5}{2x^6} = \lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x} - x$?

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + x = +\infty$ donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x} = +\infty$

Et $\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$

on trouve une formes indéterminée : "$+\infty - \infty$"

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$ or $x \to +\infty$ donc $|x| = x$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1} = \frac{1}{2}$$

6) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x-\frac{\pi}{4}}$ On pose $x-\frac{\pi}{4}=h$

donc $x \to \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow h \to 0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x-\frac{\pi}{4}} = \lim_{h\to 0} \frac{\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)}{h}$$

or : $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan h + \tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan h \times \tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\tan h + 1}{1-\tan h}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x-\frac{\pi}{4}} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{1-\tan h} \times \frac{\tan h}{h} = \frac{2}{1}\times 1 = 2$$

Limites à droite et à gauche

Exercice2 : (*Limites à droite et à gauche)*

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de f en $x_0 = -1$

Solution :Déterminons $\lim_{\substack{x\to-1\\x\succ-1}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x\to-1\\x\prec-1}} f(x)$?

$\forall x \in \mathbb{R}-\{-1;1\}$

Si : $-1 \prec x \prec 1$: $f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = -\frac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim_{\substack{x\to-1\\x\succ-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\x\succ-1}} -\frac{x+1}{x-1} = 0$

Si : $x \prec -1$: $f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = \frac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim_{\substack{x\to-1\\x\prec-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\x\prec-1}} \frac{x+1}{x-1} = 0$

donc : $\lim_{\substack{x\to-1\\x\succ-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\x\prec-1}} f(x) = 0$ donc : $\lim_{x\to-1} f(x) = 0$

Exercice3 : Soient les fonctions tels que :

$f(x) = \sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$ et $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)}$ et $h(x) = \frac{x^2+1}{x^3}\sin x$

1)Déterminer : $\lim_{x\to 2} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2)Déterminer : $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to 3} g(x)$

3)Déterminer : $\lim_{x\to 0} h(x)$

4)Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

Solution :

1)Déterminer : $\lim_{x\to 2} f(x)$ et $f(x) = \sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$

$\lim_{x\to 2} 2x+1 = 5$ et $\lim_{x\to 2} -3x^2+x = -10$

Donc : $\lim_{x\to 2} f(x) = \sqrt{5}\times(-10) = -10\sqrt{5}$

$\lim_{x\to+\infty} 2x+1 = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$

Donc : $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x+1} = +\infty$

Et on a : $\lim_{x\to+\infty} -3x^2+x = \lim_{x\to+\infty} -3x^2 = -\infty$

Donc : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

- 2) $\lim_{x\to+\infty} g(x)$? et $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

On a : $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc : $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}+1 = +\infty$

Et $\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2$ donc : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

- 2) $\lim_{x\to 3} g(x)$? et $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$\lim_{x\to 3} \sqrt{x}+1 = \sqrt{3}+1$ et $\lim_{x\to 3} -2x^2+1 = -17$ et

$\lim_{x\to 3} (x-3)^2 = 0^+$ donc : $\lim_{x\to 3} g(x) = -\infty$

3) $\lim_{x\to 0} h(x)$?.

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x^2}\frac{\sin x}{x}$$

Or $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et puisque : $\lim_{x\to 0} x^2+1 = 1$ et

$\lim_{x\to 0} x^2 = 0^+$

et $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x^2} = +\infty$ alors : $\lim_{x\to 0} h(x) = +\infty$

4) $k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)}$ donc : $D_k =]-\infty;0[\cup]0;2[\cup]2;+\infty[$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-3}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-3}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to0} -3x+1=1$ et $\lim\limits_{x\to0} x^2-2x=0$

Etude du signe de : x^2-2x

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $\lim\limits_{x\to0^+} x^2-2x=0^-$ et $\lim\limits_{x\to0^-} x^2-2x=0^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to0^+} k(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-} k(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to2} -3x+1=-5$ et $\lim\limits_{x\to2^+} x^2-2x=0^+$ et $\lim\limits_{x\to2^-} x^2-2x=0^-$

Donc : $\lim\limits_{x\to2^+} k(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^-} k(x)=+\infty$

II) CONTINUITE D'UNE FONCTION NUMERIQUE EN UN POINT :

1)Activité : Considérons la fonction f définie

par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{x-1};si...x\neq1 \\ f(1)=-4 \end{cases}$

1) Déterminer Df 2) a) $\lim\limits_{x\to1} f(x)$

b) Comparer $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ et $f(1)$

Solution :1) $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

2)a)

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-6x+5}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x-5)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1} x-5=-4$

2) b) $\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)$

On dit que f est continue en $x_0=1$

2) Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle de centre a. On dit que la fonction f est continue en a si elle admet une limite finie en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

Exemple1 : Considérons la fonction f définie par

$f(x)=\dfrac{x^2+x-12}{x-3}$; $si\ x\neq3$ et $f(3)=7$

Etudier la est continuité de f en $x_0=3$

Solution : on a : $f(x)=\dfrac{x^2+x-12}{x-3}=x+4$ D.EC

$\lim\limits_{x\to3} f(x)=\lim\limits_{x\to3} x+4=7=f(3)$

Alors : $\lim\limits_{x\to3} f(x)=f(3)$

Donc :f est continue en $x_0=3$

Exercice4 : Considérons la fonction f définie

Par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}$; $si\ x\neq0$ et $f(0)=\frac{1}{2}$

Etudier la est continuité de f en $x_0=0$

Solution :

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}+1)\tan x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\tan x}\times\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=1\times\frac{1}{2}=f(0)$

Alors : $\lim\limits_{x\to0} f(x)=f(0)$

Donc :f est continue en $x_0=0$

Exercice5 : Considérons la fonction f définie

Par : $f(x)=\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-2x}$; $si\ x\neq0$ et $x\neq2$ et $f(2)=\frac{1}{2}$

Etudier la est continuité de f en $x_0=2$

Solution : $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{x}\frac{\sin(x-2)}{x-2}=\frac{1}{2}=f(2)$ Alors :

$\lim\limits_{x\to2} f(x)=f(2)$ Donc :f est continue en $x_0=2$

Exercice6 : Considérons la fonction f définie

Par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin(\pi x)}{x-1};si...x\neq1 \\ f(1)=m \end{cases}$

avec m paramètre réel

déterminer la valeur du réel m pour laquelle f est continue en $x_0=1$

Solution : $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(\pi x)}{x-1}$

on pose : $h=x-1$ $x\to1\Leftrightarrow h\to0$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{h\to0}\frac{\sin(\pi(h+1))}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{\sin(\pi h+\pi)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\frac{-\sin(\pi h)}{\pi h}\pi=-\pi$

donc f est continue en $x_0=1$ ssi $m=-\pi$

Exercice7 : Considérons la fonction f définie par

$f(x)=2+x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$; $si\ x\neq 0$ et $f(0)=2$

Etudier la est continuité de f en $x_0=0$

Solution : $x\in\mathbb{R}^*$ $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq 1$ donc :

$|f(x)-2|=x^2\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq x^2$ et on a $\lim_{x\to 0}x^2=0$

Alors : $\lim_{x\to 0}f(x)=2=f(0)$

Donc : f est continue en $x_0=0$

3) continuité à droite et à gauche

Exemple : Soit f définie sur **R** par :

$$\begin{cases} f(x)=x^2; si...x\leq 0 \\ f(1)=2+x; si...x\succ 0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x^2=0=f(0)$

On dit que f est continue à gauche de $x_0=0$

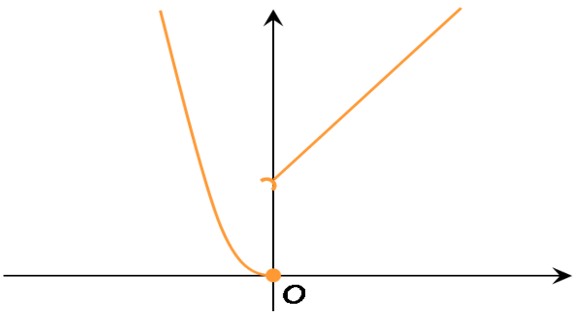
$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}2+x=2\neq f(0)$

On dit que f n'est pas continue à droite de 0

Et on a : $\lim_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim_{x\to 0^-}f(x)$

Donc, la limite en 0 n'existe pas.

Conséquence : f ne peut être continue en 2



Graphiquement : La courbe de f ne peut être tracée sur un intervalle comprenant 0, « sans lever le crayon ».

Définition :1) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a+r[$ où $r>0$

On dit que la fonction $f$est continue à droite de a si elle admet une limite finie à droite en a et $\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)$:

2) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a-r;a]$où $r>0$

On dit que la fonction $f$est continue à gauche de a si elle admet une limite finie à gauche en a et $\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)$

Exemple : Soit f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=3-x^2; si...x\leq 0 \\ f(x)=\frac{x^2-3}{2x-1}; si...x\succ 0 \end{cases}$$

Etudier la est continuité de f à droite et à gauche de $x_0=0$

Solution : $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-3}{2x-1}=3=f(0)$

donc f est continue à droite de $x_0=0$

$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}3-x^2=3=f(0)$

donc f est continue à gauche de $x_0=0$

Théorème : Une fonction est continue en un point a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche de a

Donc : f est continue en $x_0=0$ ssi

$\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)$

Exemple1 : Considérons la fonction f définie

Par : $\begin{cases} f(x)=\frac{2x+1}{7-3x}; si...x\leq 2 \\ f(x)=\frac{x^2+x-6}{x-2}; si...x\succ 2 \end{cases}$

Etudier la est continuité de f en $x_0=2$

Solution : on a : $f(2)=\frac{2\times 2+1}{7-3\times 2}=\frac{5}{7-3\times 2}=5$

$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}$

$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}x+3=5=f(2)$

Donc f est continue adroite de f en $x_0=2$

$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{2x+1}{7-3x}=\frac{5}{1}=5=f(2)$

Donc f est continue gauche en $x_0=2$

Donc f est continue en $x_0=2$

Exemple2: Soit la fonction $f:x\mapsto\frac{x^2-1}{|x-1|}$ si $x\neq 1$

Et : $f(1)=2$

Etudier la la continuité de f en $x_0=1$

Solution : $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}} x+1=2=f(1)$

donc f est continue à droite de $x_0=1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\prec 1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\prec 1}}-\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\prec 1}}-(x+1)=-2\neq f(1)$

donc f n'est pas continue à gauche de $x_0=1$

donc f n'est pas continue en $x_0=1$

On 2dit que f est discontinue en $x_0=1$

4) Prolongement par continuité

Activité : Soit la fonction h définie par

$f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+3x+2}$

1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2- Déterminer la limite $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, f est-elle continue en $x_0=-1$?

3- Soit la fonction f définie par :

$\begin{cases} f(x)=f(x); si...x\neq -1\\ f(-1)=3\end{cases}$

a) Déterminer D_f

b) Etudier la continuité de la fonction f en $x_0=-1$ La fonction f s'appelle un prolongement par continuité de la fonction de f en -1

4- Peut-on prolonger f par continuité en a = −2

Solution : 1)

$x\in D_f \Leftrightarrow x^2+3x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$ et $x\neq -2$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-1;-2\}$

2) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2+3x+2}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x+2)}$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x+1}{x+2}=3$

$-1\notin D_f$ donc f n'est pas continue en $x_0=-1$

3) a) $\begin{cases} f(x)=f(x); si...x\neq -1\\ f(-1)=3\end{cases}$ donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$

b) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=3=f(-1)$

donc f est continue en $x_0=-1$

4) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2+3x+2}$?

$\lim\limits_{x\to -2^+} x^3+1=-7$

$\lim\limits_{x\to -2^+} x^2+3x+2=0^-$ donc : $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=+\infty$

Donc on ne peut pas prolonger f par continuité en a = −2

Théorème et définition : Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f ; a un réel tel que $a\notin D_f$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ (finie)

La fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=f(x); si...x\neq a\\ f(a)=l\end{cases}$

Est une fonction continue en $\boldsymbol{a}$ et s'appelle un prolongement par continuité de la fonction f en a

Exemple : Soit f une fonction définie par

$f(x)=\frac{1-\cos x}{x}$ Donner un prolongement par continuité de la fonction f en $x_0=0$

Solution : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\times x=0$

Car : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

Donc La fonction f définie par :

$\begin{cases} f(x)=f(x); si...x\neq 0\\ f(0)=0\end{cases}$

Est une prolongement par continuité de la fonction f en $x_0=0$

III) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES.

1) Continuité sur un intervalle

Définition :

Soit f une fonction dont le domaine de définition est D_f, soit $]a, b[$ un intervalle inclus dans Df

1) On dit que f est continue sur l'ouvert] a, b [si elle est continue en tout point de $]a, b[$

2) On dit que f est continue sur $[a, b[$ si elle est continue sur $]a, b[$ et à droite de a

3) On dit que f est continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$, à droite de a et à gauche de b

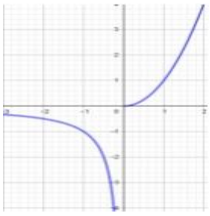
Remarque :

1) Si une fonction f est continue sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$ elle est continue sur $[a, c]$

2) En général si f est continue sur un intervalle I et sur un intervalle J et si $I \cap J \neq \emptyset$ alors f est continue sur $I \cup J$.

3) f peut-être continue sur $[a, b[$ et sur $[b, c]$ sans qu'elle soit continue sur $[a, c]$

Dans le graphique ci-dessous f est continue sur $[-3,0[$ et $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} ; si...x \prec 0 \\ f(x) = x^2 ; si...x \geq 0 \end{cases}$



continue sur [0, 2] mais pas continue sur [−3,0] car elle n'est pas continue en 0

2) Opérations sur les fonctions continues

Propriétés : 1)Si f et g sont deux fonctions continues en a alors :

a) $f + g$ b) $f \times g$ c) $|f|$

Sont des fonctions continues en a

2)Si f et g sont deux fonctions continues en a et $g(a) \neq 0$ alors

a) $\frac{1}{g}$ b) $\frac{f}{g}$ sont des fonctions continues en a.

3) Si f une fonction continue en a et $f(a) \geq 0$ alors : $\sqrt{f}$ est continue en a

Remarque : La propriété précédente reste vraie soit à droite de a, à gauche de a ou sur un intervalle I (En tenant compte des conditions)

Propriétés : 1) Tout fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$

2) Les fonctions sin et cos sont continue sur $\mathbb{R}$

Exemples :

1) $h(x) = \sqrt{x^2 + x + 3}$

$x^2 + x + 3$ Est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ de plus $(\forall x \in \mathbb{R})(\ x^2 + x + 3 \geq 0)$

(Son discriminant Δ est négatif)

2) $g(x) = \frac{x^4 + x^3 - 6}{x^2 + 2x - 3}$ est continue sur :

$]-\infty, -3[$; sur $]-3, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

3) La fonction tan est continue sur tous le intervalles de la forme : $]-\pi/2 + k\pi ; \pi/2 + k\pi[$ (où $k \in \mathbb{Z}$)

3) Continuité de la composition de deux fonctions.

Théorème : Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J tels que $f(I) \subset J$ et x_0 un élément de I.

1) Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$ alors gof est continue en x_0.

2) Si f est continue I et g continue en $f(I)$ alors gof est continue I.

Exemples : 1) Soit f une fonction définie par $f(x) = \cos(2x^2 - 3x + 4)$

Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$

Puisque les fonctions : $f_1 : x \to 2x^2 - 3x + 4$ et $f_2 : x \to \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$

Et $f_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ alors : $f = f_2 \circ f_1$ est continue sur $\mathbb{R}$

2) Soit g une fonction définie par

$g(x) = \sqrt{\frac{x}{1 + \sin^2 x}}$

Montrons que g est continue sur $\mathbb{R}^+$

On a : $D_g = [0; +\infty[$ et Puisque la fonction :

$g_1 : x \to \frac{x}{1 + \sin^2 x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et

$g_1(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$ et $g_2 : x \to \sqrt{x}$ sont continue sur $\mathbb{R}^+$

Donc : $g = g_2 \circ g_1$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

3) Soit f et g deux fonctions définies par

$\begin{cases} f(x) = x + 1 ; si...x \prec 0 \\ f(x) = 0 ; si...x \geq 0 \end{cases}$ et $g(x) = 5$

Montrons que f est n'est pas continue en $x_0 = 0$ et $h = g \circ f$ est continue en $x_0 = 0$

En effet :on a $f(0) = 0$

et $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x + 1 = 1 \neq f(0)$

Et g est continue en $x_0 = 0$

mais on a : $(g \circ f)(x) = 5$ est continue en $x_0 = 0$

4) $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car

$x \to x^2+1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc : $x \to \frac{1}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$

et $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\left(\frac{1}{x^2+1} \in \mathbb{R}\right)$ et sin est continue sur $\mathbb{R}$

3) Limite de $v \circ u$

Théorème :Soit u une fonction définie sur un intervalle pointé de centre x_0 telle $\lim_{x \to x_0} u(x)=l$ si v est continue en l alors $\lim_{x \to x_0} (v \circ u)(x)=v(l)$

Preuve :On a : $\lim_{x \to x_0} u(x)=l \in \mathbb{R}$ donc u admet un prolongement par continuité u définie comme : $\begin{cases} u(x)=u(x); si...x \neq x_0 \\ u(x_0)=l \end{cases}$

La fonction u étant continue en x_0 ; et v est continue en $u(x_0)=l$ alors et d'après le théorème de la composition $v \circ u$ est continue en x_0 et par suite :

$$\lim_{x \to x_0} (v \circ u)(x) = \lim_{x \to x_0} (v \circ u)(x) = (v \circ u)(x_0) = v(l)$$

Exemples : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\pi\right)$

2) $\lim_{x \to +\infty} \cos\left(\pi\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$

Solution :1)

Soient : $f : x \to \frac{1-\cos x}{x^2}\pi$ et $g : x \to \sin x$

Puisque : $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}\pi = \frac{\pi}{2}$ g est continue sur $\mathbb{R}$

Donc continue en $x_0 = \frac{\pi}{2}$ donc :

$$\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

2) puisque : $\lim_{x \to +\infty} \pi\sqrt{\frac{1-1/x}{1-1/x}} = \pi$

Et la fonction : $x \to \cos x$ continue en π

donc : $\lim_{x \to +\infty} \cos\left(\pi\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) = \cos\pi = -1$

Exercice8 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{\pi \tan x}{3x}\right)$ 2) $\lim_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2+7}\right)$

3) $\lim_{x \to 0} \sin\sqrt{\frac{2x^2}{1-\cos x}}$

Solution :1) $\lim_{x \to 0} \frac{\pi \tan x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\pi}{3}\frac{\tan x}{x} = \frac{\pi}{3}$

et Puisque : $x \to \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$

Donc continue en $x_0 = \frac{\pi}{3}$ donc :

$$\lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{\pi \tan x}{3x}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2+7} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\pi x^2}{4x^2} = \frac{\pi}{4}$

et Puisque : $x \to \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$

Donc continue en $x_0 = \frac{\pi}{4}$ donc :

donc : $\lim_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2+7}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3) on a : $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{0}$ donc : $\lim_{x \to 0} 2\frac{x^2}{1-\cos x} = 4$

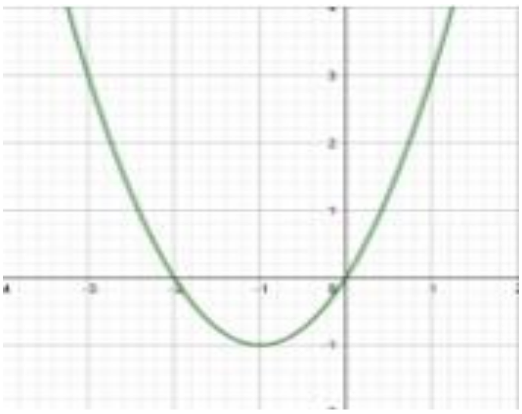
donc : $\lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{2x^2}{1-\cos x}} = 2$: $x \to \sqrt{x}$ est continue en 4

donc : $\lim_{x \to 0} \sin\sqrt{\frac{2x^2}{1-\cos x}} = \sin 2$ car : $x \to \sin x$ est continue en 2

IV) IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

1) Image d'un segment (intervalle fermé) :

Activité : Le graphe ci-contre est le graphe de la fonction $f(x)=x^2+2x$

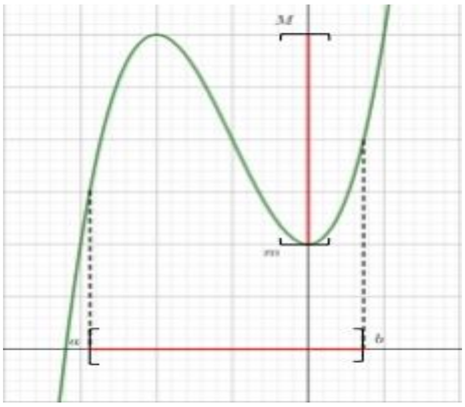


Déterminer graphiquement les images des intervalles : $I_1 = [0,1]$, $I_2 = [-3,-1]$; $I_3 = [-3,1]$

Théorème : (Admis)

L'image d'un segment $[a, b]$ par une fonction continue est le segment $[m, M]$ où :

$m = \min_{x\in[a;b]} f(x)$ et $M = \max_{x\in[a;b]} f(x)$



Cas particulier :

1) Si f est continue croissante sur $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$

2) Si f est continue décroissante sur $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$

2) Image d'un intervalle.

2.1 Théorème général

Théorème (admis) : L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Exemples : $f(x) = x^2 + 2x$

Graphiquement en a : (le graphe ci-dessus)

$f([-1,2]) = [-1,3]$ et $f([0,2[) = [-1,0]$

$f(]-1,0]) = [0,3[$ et $f([2,+\infty[) = [0,+\infty[$

$f(]-\infty,1]) = [-1,+\infty[$

Remarque : L'intervalle I et son image $f(I)$ par une fonction continue n'ont pas nécessairement la même forme.

2.2 Cas d'une fonction strictement monotone

1) $\boldsymbol{f}$ continue et strictement croissante sur L'intervalle $\boldsymbol{I}$ et $a\in I$ et $b\in I$

$f([a;b]) = [f(a); f(b)]$ et $f([a;b[) = \left[f(a); \lim_{\substack{x\to b\\ x\prec b}} f(x)\right[$

$f(]a;b]) = \left]\lim_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x); f(b)\right]$ et $f(]a;b[) = \left]\lim_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x); \lim_{\substack{x\to b\\ x\prec b}} f(x)\right[$

2) $\boldsymbol{f}$ continue et strictement décroissante sur L'intervalle $\boldsymbol{I}$ et $a\in I$ et $b\in I$

$f([a;b]) = [f(b); f(a)]$ et $f([a;b[) = \left]\lim_{\substack{x\to b\\ x\prec b}} f(x); f(a)\right]$

$f(]a;b]) = \left[f(b); \lim_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x)\right[$ et $f(]a;b[) = \left]\lim_{\substack{x\to b\\ x\prec b}} f(x); \lim_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x)\right[$

Exemple : Soit f une fonction définie par

$f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$

Déterminer les images des intervalles suivants : $[0,1]$; $[-2,-1[$; $]-1, 1]$; $[2, +\infty[$

Solution : $D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+3 = 5 \succ 0$ donc : $\boldsymbol{f}$ continue et strictement croissante sur les intervalles $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$ donc on a : $f([0;1]) = [f(0); f(1)] = \left[-3; \dfrac{-1}{2}\right]$

$f([-2;-1[) = \left[f(-2); \lim_{\substack{x\to -1\\ x\prec -1}} f(x)\right[= [7;+\infty[$

$f(]-1;1]) = \left]\lim_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}} f(x); f(1)\right] = \left]-\infty; \dfrac{-1}{2}\right]$

$f([2;+\infty[) = \left[f(2); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= \left[\dfrac{1}{3}; 2\right[$

V) THEOREME DES VALEURS INTERMEDIERE – TVI.

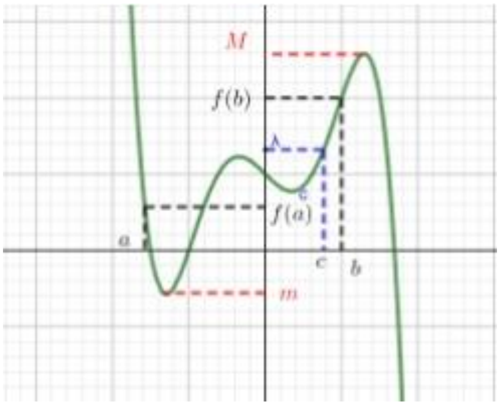
1)Cas général

Théorème T.V.I : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ .Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$

Preuve :

Rappelons que : $f(I) = J \Leftrightarrow (\forall x \in I)(f(x) \in J)$ et $(\forall y \in J)(\exists x \in I)(f(x) = y)$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I

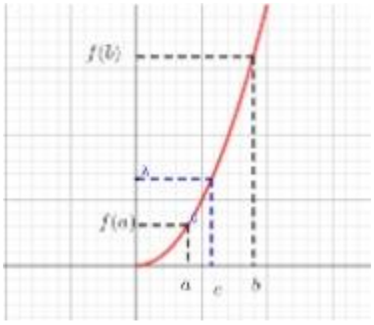


a et b deux éléments de I tels que : $a < b$.
On sait que $f([a, b]) = [m, M]$
où $m = \min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ et $M = \max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$

On a donc $f(a) \in [m, M]$ et $f(b) \in [m, M]$.
Soit λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ on a donc :
$\lambda \in [m, M]$ et puisque $f([a, b]) = [m, M]$ donc λ admet au moins un antécédent c dans l'intervalle $[a, b]$. D'où pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$

2) Cas f strictement monotone.

Théorème T.V.I (cas f strictement monotone)
Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a, b]$.
Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un et un seul $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$



Remarque : L'expression " Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un et un seul $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$ "peut-être formulée comme :
" Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = \lambda$ admet une solution unique dans $[a, b]$

3) Corolaires

Corolaire1 (T.V.I) : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ .Si $f(a) \times f(b) < 0$ il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$

Preuve :$f(a) \times f(b) < 0$ veut dire que :
$f(a)$ et $f(b)$ ont des signes opposés donc 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ On prend $\lambda = 0$ dans le théorème général des valeurs intermédiaire.

Corolaire2 (T.V.I) :
Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a, b]$ .Si $f(a) \times f(b) < 0$ il existe un et un seul c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = 0$

4) Applications :

Exemple1 : Montrer que l'équation :
$4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$ admet une racine dans chacune des intervalles suivants : $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$; $\left]-\frac{1}{2};0\right[$ et $]0;1[$

Solution : on considère la fonction : g tel que
$g(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$

- On a : g est est continue sur sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynôme) donc continue sur tout intervalle de $\mathbb{R}$
  - Et on a : $g(-1) = -\frac{3}{2}$ et $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ donc :
    $g\left(-\frac{1}{2}\right) \times g(-1) \prec 0$ donc :d'après le **(T.V.I)**
    il existe $\alpha_1 \in \left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ tel que : $g(\alpha_1) = 0$
  - Et on a : $g(0) = -\frac{1}{2}$ et $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ donc :
    $g\left(-\frac{1}{2}\right) \times g(0) \prec 0$ donc :d'après le **(T.V.I)**
    il existe $\alpha_2 \in \left]-\frac{1}{2};0\right[$ tel que : $g(\alpha_2) = 0$
  - Et on a : $g(0) = -\frac{1}{2}$ et $g(1) = \frac{1}{2}$ donc :
    $g(1) \times g(0) \prec 0$ donc :d'après le **(T.V.I)**
    il existe $\alpha_3 \in]0;1[$ tel que : $g(\alpha_3) = 0$

donc l'équation : $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$ admet 3 racines différentes dans chacune des intervalles:
$\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$; $\left]-\frac{1}{2};0\right[$ et $]0;1[$

Exemple2 : Montrer que l'équation : $x^3 + x + 1 = 0$
Admet une racine unique dans $]-1;0[$

Solution : on considère la fonction : f tel que

$f(x)=x^3+x+1$

- On a : f est est continue sur sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynôme) donc continue sur $]-1;0[$
- on a : $f(-1)=-1$ et $f(0)=1$ donc : $f(1)\times f(-1)\prec 0$
- $f'(x)=3x^2+1\succ 0$ sur $]-1;0[$ donc f strictement croissante sur $]-1;0[$

Donc : d'après le **(T.V.I)** l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans $]-1;0[$

Exercice9 : Montrer que l'équation : $\cos x=x$ Admet au moins une racine dans intervalle : $I=[0;\pi]$

Solution : $\cos x=x \Leftrightarrow \cos x-x=0$

On pose : $f(x)=\cos x-x$

- On a : f est est continue sur sur $\mathbb{R}$ (car c'est la différence de deux fonctions continues) donc continue sur $I=[0;\pi]$
- on a : $f(\pi)=-1-\pi<0$ et $f(0)=1$ donc : $f(0)\times f(\pi)<0$

Donc : d'après le **(T.V.I)**

il existe $\alpha\in]0;\pi[$ tel que : $f(\alpha)=0$

Exercice10 : Montrer que l'équation : $1+\sin x=x$ Admet au moins une racine dans intervalle : $I=\left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]$

Solution : $1+\sin x=x \Leftrightarrow 1+\sin x-x=0$

On pose : $f(x)=1+\sin x-x$

- On a : f est est continue sur sur $\mathbb{R}$ (car c'est la différence de deux fonctions continues) donc continue sur $I=\left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]$
- on a : $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4-\pi}{2}\succ 0$ et

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{6+3\sqrt{3}-4\pi}{6}\prec 0$ donc : $f\left(\frac{\pi}{2}\right)\times f\left(\frac{2\pi}{3}\right)<0$

Donc : d'après le **(T.V.I)**

il existe $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right[$ tel que : $f(\alpha)=0$

Exercice11 : on considère la fonction : f tel que $f(x)=x^3+x-1$

1) Montrer que l'équation : $f(x)=0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$

2) Montrer que l'équation : $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha\in]0;1[$

3) étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

Solution :

1)a)On a : f est est continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynôme)

b) $f'(x)=3x^2+1\succ 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f strictement croissante sur $\mathbb{R}$

c) on a : $f(\mathbb{R})=f(]-\infty;+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$ $=]-\infty;+\infty[$ et on a : $0\in f(\mathbb{R})$

donc d'après le **(T.V.I)** l'équation**)** l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$

1) on a f est est continue sur $[0;1]$ et $f(0)\times f(1)\prec 0$ ($f(0)=-1$ et $f(1)=1$)

et f strictement croissante sur $[0;1]$

Donc : d'après le **(T.V.I)** l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans $\alpha\in]0;1[$

3) étudions le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

1cas : si $x\le\alpha$ alors $f(x)\le f(\alpha)$ (car f strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc $f(x)\le 0$ (car $f(\alpha)=0$)

2cas : si $x\ge\alpha$ alors $f(x)\ge f(\alpha)$ (car f strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc $f(x)\ge 0$ (car $f(\alpha)=0$)

VI) FONCTIONS COMPOSEES ET FONCTIONS RECIPROQUES.

1) Le théorème

Activité : Soit $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

1- Montrer que pour tout y dans $I=[0,+\infty[$, l'équation $f(y)=x$ admet une solution unique dans l'intervalle $J=]0,1]$

2- Etudier la monotonie et la continuité de f sur $\mathbb{R}$

On dit que la fonction f admet une fonction réciproque de J $=]0, 1]$ vers I $= [0, +\infty[$

Théorème : Soit f une fonction définie continue et strictement monotone sur un intervalle I, On a f admet une fonction réciproque f^{-1} définie de $J = f(I)$ vers I.

donc f est une bijection de I vers $f(I)$

D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I et on a :

$$\begin{cases} f(y)=x \\ y\in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x\in f(I) \end{cases}$$

$$\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=x \quad \forall x\in f(I)$$

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(y)=y \quad \forall y\in I$$

2)Application :

Exemple1 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{x-3}{x+2}$$

1) Montrer que la fonction g la restriction de f sur intervalle $I=\left]-2;+\infty\right[$ admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un J qu'il faut déterminer.

2) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle J

Solution : 1) $f(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$ $\quad D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\neq 0\}$

$D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$

$$f'(x)=\left(\frac{x-3}{x+2}\right)'=\frac{(x-3)'(x+2)-(x-3)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{1(x+2)-1\times(x-3)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{5}{(x+2)^2}>0$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 1$

puisque g est strictement croissante et continue **sur :** $I=\left]-2;+\infty\right[$

donc g admet une fonction réciproque g^{-1}définie sur $J=g(I)=g\left(\left]-2;+\infty\right[\right)=\left]-\infty;1\right[$

2) $\begin{cases} g(y)=x \\ y\in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=g^{-1}(x) \\ x\in g(I) \end{cases}$

$$\begin{cases} g(y)=x \\ y\in \left]-2;+\infty\right[\end{cases} \Leftrightarrow \frac{y-3}{y+2}=x \Leftrightarrow y-3=x(y+2)$$

$$\Leftrightarrow y-xy=2x+3 \Leftrightarrow y(1-x)=2x+3$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{2x+3}{1-x}$$ Donc $g^{-1}(x)=\dfrac{2x+3}{1-x}$

Donc : $g^{-1}:\left]-\infty;1\right[\to\left]-2;+\infty\right[$

$x\to g^{-1}(x)=\dfrac{2x+3}{1-x}$

Exercice 12: Soit f la fonction définie sur $I=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ par : $f(x)=\sqrt{2x-1}$

1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1}définie sur un J qu'il faut déterminer.

2) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle J

3)Représenter $\left(C_f\right)$ et $\left(C_{f^{-1}}\right)$ dans le même repére orthonormé $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

Solution : 1) $D_f=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[=I$

$$\forall x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\quad f'(x)=\left(\sqrt{2x-1}\right)'=\frac{(2x-1)'}{2\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}>0$$

x	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$0 \nearrow$	$+\infty$

Donc : f est strictement croissante et continue **sur :** $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[=I$

donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J=f(I)=f\left(\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\right)=\left[0;+\infty\right[$

2) $\begin{cases} f(y)=x \\ y\in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x\in f(I) \end{cases}$

$$\begin{cases} f(y)=x \\ y\in\left[0;+\infty\right[\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2y-1}=x \Leftrightarrow 2y-1=x^2$$

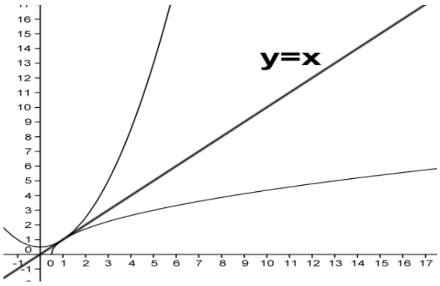
$$\Leftrightarrow 2y=x^2+1 \Leftrightarrow y=\frac{x^2+1}{2}$$

Donc $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2+1}{2}$

Donc : $f^{-1}:[0;+\infty[\to\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

$x\to f^{-1}(x)=\frac{x^2+1}{2}$

3) $\left(C_{f^{-1}}\right)$ et $\left(C_f\right)$ sont symétriques par rapport à :(Δ) $y = x$



3) Propriété de la fonction réciproque

Propriété 1 : Si f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I alors f^{-1} à la même monotonie sur J que celle de f sur I.

Preuve :

$$T_{f^{-1}}=\frac{f^{-1}(x_1)-f^{-1}(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{y_1-y_2}{f(x_1)-f(x_2)}$$

$$T_{f^{-1}}=\frac{1}{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{y_1-y_2}}$$

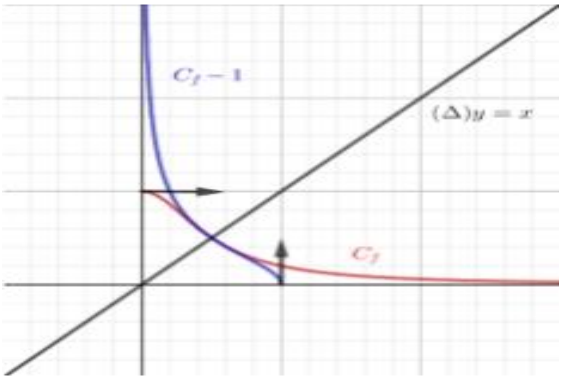
Donc le taux de f^{-1} sur J à le même signe que le taux de f sur I

Et on conclut.

Propriété 2 : Si f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I alors $\left(C_{f^{-1}}\right)$ et $\left(C_f\right)$ sont symétriques par rapport à :(Δ) $y = x$

Remarque :

La symétrie des deux courbes concerne toutes leurs composantes ; les asymptotes ; les tangentes et demi-tangentes…



4) La fonction racine n − éme

4.1 Définition et règles de calculs

Propriété et définition :

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$; la fonction :

$f:x\to x^n$ est une fonction continue strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} de $f\left(\mathbb{R}^+\right)=\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$

La fonction réciproque f^{-1} s'appelle la fonction racine n − $éme$ et se note $\sqrt[n]{\ }$

Conséquence de la définition :

1)La fonction $\sqrt[n]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}+$

2) $\forall x\in\mathbb{R}^+\ \ \sqrt[n]{x}\geq 0$

3)$(\forall x \in \mathbb{R}+)(\forall y \in \mathbb{R}+)\ \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$

4)La fonction $\sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}+$ strictement croissante.

5)$(\forall x \in \mathbb{R}+)(\forall y \in \mathbb{R}+)\ \sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x=y$

6)$(\forall x \in \mathbb{R}+)\ (\forall a \in \mathbb{R}+)\ \sqrt[n]{x}\geq a\Leftrightarrow x\geq a^n$

7)$(\forall a \in \mathbb{R}+)\ \sqrt[n]{x}\leq a\Leftrightarrow 0\leq x\leq a^n$

8)$(\forall x \in \mathbb{R}+)\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=\sqrt[n]{x^n}=x$

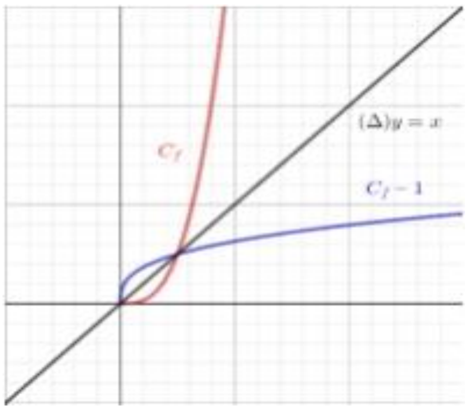
9)$(\forall x \in \mathbb{R}+)(\forall p \in \mathbb{N})\ \left(\sqrt[n]{x}\right)^p=\sqrt[n]{x^p}$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$

11)Si $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{u(x)}=+\infty$

12)Si $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=l$ et $l\geq 0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{u(x)}=\sqrt[n]{l}$

13)La courbe de la fonction $\sqrt[n]{\ }$



Règle de calcul :

1) $(\forall x \in \mathbb{R}+)(\forall y \in \mathbb{R}+)\ \sqrt[n]{x\times y}=\sqrt[n]{x}\times\sqrt[n]{y}$

2) $(\forall x \in \mathbb{R}+)(\forall y \in \mathbb{R}*+)\ \sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

3) $(\forall x \in \mathbb{R}+)(\forall n \in \mathbb{N}*)(\forall p \in \mathbb{N}*)$ $\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[n\times p]{x}$

4) $(\forall x \in \mathbb{R}+)(\forall n \in \mathbb{N}*)(\forall p \in \mathbb{N}*)$ $\sqrt[n]{x} = \sqrt[np]{x^p}$
(à prouver)

Remarque :

1) $(\forall x \in \mathbb{R}+)$ $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$

2) $(\forall x \in \mathbb{R}+)$ $\sqrt[1]{x} = x$

4.2 Résolution de l'équation $x^n = a$

Exemples : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^5 = 32$ **2)** $x^7 = -128$ **3)** $x^4 = 3$ **4)** $x^6 = -8$

Solutions :1) $x^5 = 32$ **donc** $x > 0$

$x = \sqrt[5]{32} \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{2^5} \Leftrightarrow x = 2$ **donc :** $S = \{2\}$

2) $x^7 = -128$ donc $x < 0$

Donc : $x = -\sqrt[7]{128} \Leftrightarrow x = -\sqrt[7]{2^7} \Leftrightarrow x = -2$

Donc : $S = \{-2\}$

3) $x^4 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{3}$ ou $x = -\sqrt[4]{3}$

Donc : $S = \left\{-\sqrt[4]{3}; \sqrt[4]{3}\right\}$

4) $x^6 = -8$

On a $x^6 \geq 0$ et $-8 < 0$ donc $S = \Phi$

Exercices d'applications :

Exercice13 : simplifier les expressions suivantes :1) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$ 2) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{2}}$

3) $A = \sqrt[5]{32} - \left(\sqrt[7]{2}\right)^7 + \sqrt[3]{\sqrt[3]{512}} + \frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

4) $B = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{16} \times \sqrt{\sqrt[3]{4}} \times \sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}$

5) $C = \frac{(27)^{\frac{2}{9}} \times (81)^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}$ 6) $D = \sqrt[6]{\frac{2^5 \times 128000000}{27^2}}$

7) $E = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}}$ 8) $F = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{8} \times \left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}$

Solutions :1) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$ 2) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[2\times4]{2} = \sqrt[8]{2}$

2) $A = \sqrt[5]{32} - \left(\sqrt[7]{2}\right)^7 + \sqrt[3]{\sqrt[3]{512}} + \frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}} = \sqrt[5]{2^5} - 2 + \sqrt[3]{\sqrt[3]{2^9}} + \sqrt[4]{\frac{96}{3}}$

$A = 2 - 2 + \sqrt[9]{2^9} + \sqrt[5]{32} = 2 - 2 + 2 + 2 = 4$

3) $B = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{16} \times \sqrt[6]{4} \times \sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}} = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{2^4} \times \sqrt[6]{2^2} \times \sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}$

4)

$B = \frac{2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{4}{5}} \times 2^{\frac{2}{6}} \times 2^{\frac{1}{15}}}{\sqrt[15]{2^8}} = \frac{2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{4}{5}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{15}}}{2^{\frac{8}{15}}} = \frac{2^{\frac{23}{15}}}{2^{\frac{8}{15}}} = 2^{\frac{23}{15} - \frac{8}{15}} = 2^{\frac{15}{15}} = 2$

5) $C = \frac{(27)^{\frac{2}{9}} \times (81)^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}} = \frac{\left(3^3\right)^{\frac{2}{9}} \times \left(3^4\right)^{\frac{1}{4}} \times \left(3^2\right)^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}} = \frac{3^{\frac{2}{3}} \times 3^1 \times 3^5}{3^{\frac{17}{3}}}$

$C = \frac{3^{\frac{20}{3}}}{3^{\frac{17}{3}}} = 3^{\frac{20}{3} - \frac{17}{3}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3$

6) $D = \sqrt[6]{\frac{2^5 \times 128000000}{27^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^5 \times 2^7 \times 10^6}{\left(3^3\right)^2}} = \sqrt[6]{\frac{10^6}{3^6} \times 2^{12}} =$

$D = \sqrt[6]{\left(\frac{10}{3}\right)^6} \times \sqrt[6]{\left(2^2\right)^6} = \frac{10}{3} \times 2^2 = \frac{40}{3}$

7)

$E = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}} = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{2^3}}{\sqrt[10]{2^7}} = \frac{\sqrt[10]{2^2} \times \sqrt[10]{2^{15}}}{\sqrt[10]{2^7}}$

$= \frac{\sqrt[10]{2^{17}}}{\sqrt[10]{2^7}} = \sqrt[10]{2^{10}} = 2$

8) $F = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{8} \times \left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}} = \frac{4^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{2}} \times \left(\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}$

$F = \frac{4^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{2}{4}}}{4^{\frac{1}{6}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{2}{4}}}{2^{\frac{2}{6}}} = 2^{\frac{2}{3} + \frac{3}{2} + \frac{2}{4} - \frac{1}{3}} = 2^{\frac{7}{3}}$

$F = 2^{2 + \frac{1}{3}} = 2^2 \times 2^{\frac{1}{3}} = 4\sqrt[3]{2}$

Exercice14 : comparer : $\sqrt[5]{2}$ et $\sqrt[7]{3}$

Solutions : on a : $\sqrt[n\times m]{x^m} = \sqrt[n]{x}$

$\sqrt[7]{3} = \sqrt[7\times5]{3^5} = \sqrt[35]{243}$ et $\sqrt[5]{2} = \sqrt[7\times5]{2^7} = \sqrt[35]{128}$

On a : $\sqrt[35]{243} > \sqrt[35]{128}$ car $243 > 128$

Donc **:** $\sqrt[7]{3} > \sqrt[5]{2}$

Exercice 15 : résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $\sqrt[5]{3x-4} = 2$ 2) $\left(\sqrt[5]{x}\right)^2 - 5\sqrt[5]{x} + 6 = 0$

Solutions :1)

$\sqrt[5]{3x-4} = 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt[5]{3x-4}\right)^5 = (2)^5 \Leftrightarrow 3x - 4 = 32$

$\Leftrightarrow x = 12$ donc : $S = \{12\}$

2) $\left(\sqrt[5]{x}\right)^2-5\sqrt[5]{x}+6=0$ on pose : $\sqrt[5]{x}=X$

L'équation devient : $X^2-5X+6=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times6=25-24=1>0$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=3$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=2$

Donc : $\sqrt[5]{x}=3$ ou $\sqrt[5]{x}=2$

Donc : $x=243$ ou $x=32$

Donc : $S=\{32;243\}$

Exercice 16 : calcules les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to2}\sqrt[5]{x^3+24}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^5+2x^3-x+4}$

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$ 4) $\lim\limits_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

5) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt{x+3}}{x-1}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}$

7) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}$

Solutions :

1) $\lim\limits_{x\to2}\sqrt[5]{x^3+24}=\sqrt[5]{2^3+24}=\sqrt[5]{8+24}=\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^5+2x^3-x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^5}=\sqrt[3]{+\infty}=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)''$ FI

On a : $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}{x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3-(1)^3}{x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x+1-1}{x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2}=\frac{1}{1+1\times1+1}=\frac{1}{3}$$

4) $\lim\limits_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}=\left(\frac{0}{0}\right)''$ FI

On a : $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

$$\lim_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}=\lim_{x\to8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-2^3}{(x-8)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\times\sqrt[3]{x}+2^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to8}\frac{x-8}{(x-8)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\times\sqrt[3]{x}+2^2\right)}=\lim_{x\to8}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\times\sqrt[3]{x}+4}=\frac{1}{12}$$

5) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt{x+3}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{2x+6}-2}{x-1}-\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2x+6-8}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2+2\times\sqrt[3]{2x+6}+2^2\right)}-\frac{x+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2+2\times\sqrt[3]{2x+6}+2^2}-\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}-\frac{1}{4}=\frac{-1}{12}$$

6)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[6]{(x+1)^3}}{\sqrt[6]{\left(x^2-2\right)^2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[6]{\frac{(x+1)^3}{\left(x^2-2\right)^2}}=0$$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^3}{\left(x^2-2\right)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

7) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt[4]{(x-1)^2}}=\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt[4]{\frac{x^2-1}{(x-1)^2}}$

$$=\lim_{x\to1^+}\sqrt[4]{\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)}}=\lim_{x\to1^+}\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}=+\infty$$

Car : $\lim\limits_{x\to1^+}x+1=2$ et $\lim\limits_{x\to1^+}x-1=0^+$

Exercice17 : simplifier les expressions suivantes :1) $A=\frac{\sqrt[3]{1024}\times\sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64}\times\sqrt[3]{\sqrt{252}}\times\sqrt{18}}$

2) a)comparer : $\sqrt[5]{4}$ **et** $\sqrt[4]{3}$

b) comparer : $\sqrt[3]{28}$ et $\sqrt{13}$

c) comparer : $\sqrt[5]{23}$ et $\sqrt[15]{151}$

Solutions :1)

$$A=\frac{\sqrt[3]{1024}\times\sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64}\times\sqrt[3]{\sqrt{252}}\times\sqrt{18}}=\frac{\sqrt[3]{2^{10}}\times\sqrt[5]{2^{10}\times10^5}}{\sqrt[4]{2^6}\times\sqrt[3]{\sqrt{2^8}}\times\sqrt{2\times3^2}}$$

$$A=\frac{2^{\frac{10}{3}}\times2\times10}{2^{\frac{1}{4}}\times2^{\frac{4}{3}}\times3\times2^{\frac{1}{2}}}=20$$

2) a)comparaison de : $\sqrt[5]{4}$ et $\sqrt[4]{3}$

on a $\sqrt[n\times m]{x^m}=\sqrt[n]{x}$

et on a : $\sqrt[4]{3}=\sqrt[4\times5]{3^5}=\sqrt[20]{243}$ et $\sqrt[5]{4}=\sqrt[4\times5]{4^4}=\sqrt[20]{256}$

donc $\sqrt[5]{4}>\sqrt[4]{3}$ car $256>243$

b)comparaison de : $\sqrt[3]{28}$ et $\sqrt{13}$

on a $\sqrt[3]{28}=\sqrt[6]{28^2}=\sqrt[6]{784}$ et

$\sqrt{13}=\sqrt[2]{13}=\sqrt[2\times3]{13^3}=\sqrt[6]{2197}$

on a $\sqrt[6]{2197}>\sqrt[6]{784}$ car $\sqrt{13}>\sqrt[3]{28}$

b)comparaison de : $\sqrt[15]{151}$ et $\sqrt[5]{23}$

$\sqrt[5]{23}=\sqrt[15]{23^3}=\sqrt[15]{12167}$

Donc : $\sqrt[5]{23}>\sqrt[15]{151}$

4.3 L'expression conjuguai et ses applications

On sait que $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

et $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ Il en résulte :

$a-b=\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ et $a+b=\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$

Par suite :$(\forall x\in\mathbb{R}^+)(\forall y\in\mathbb{R}^{*+})$

$$\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=\frac{x-y}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\left(\sqrt[3]{y}\right)^2}$$

$(\forall x\in\mathbb{R}^+)(\forall y\in\mathbb{R}^{*+})$

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\frac{x+y}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\left(\sqrt[3]{y}\right)^2}$$

Applications :

Exercice18 :1) Rendre le dénominateur rationnel

$a=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-2}$ $\quad b=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$ $\quad c=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}}$

$d=\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}$

2) Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$ $\qquad$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-x$

Solutions :1)

$a=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-2}$ on utilise : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$a=\frac{3\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{2}^2+2\sqrt[3]{2}+2^2\right)}{\left(\sqrt[3]{2}-2\right)\left(\sqrt[3]{2}^2+2\sqrt[3]{2}+2^2\right)}=\frac{3\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{2}^2+2\sqrt[3]{2}+2^2\right)}{\sqrt[3]{2}^3-2^3}$$

$$a=\frac{3\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{2}^3+2\sqrt[3]{2}+2^2\right)}{-6}=-\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{2}^3+2\sqrt[3]{2}+2^2\right)}{2}$$

$$b=\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}=\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}\times1+1^2\right)}$$

$$b=\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-1^3}=\sqrt[3]{2}-1$$

$$c=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}}=\frac{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}}{\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}\right)}$$

$$c=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}}=\frac{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-\left(\sqrt[3]{5}\right)^3}=-\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}}{3}$$

$$d=\frac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2^2}}$$

$$d=\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}{\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2^2}\right)}=\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}$$

$$d=\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}{3}$$

2) a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$ on utilise :

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\times1+1^2\right)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\times1+1^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-2(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\times1+1\right)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-1^3\right)}=\lim_{x\to1}\frac{-2\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\times1+1\right)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\right)}=\frac{-6}{2}=\frac{-3}{2}$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}-x\right)\left(\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}\times1+x^2\right)}{\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}\times1+x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}\times1+x^2}=0$$

D'ordre 4 :

On sait que $a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

Il en résulte : $a-b=\dfrac{a^4-b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$

Par suite :$(\forall x\in\mathbb{R}^+)(\forall y\in\mathbb{R}^{*+})$

$$\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=\frac{x-y}{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2y}+\sqrt[4]{xy^2}+\sqrt[4]{y^3}}$$

A remarquer qu'on ne peut pas factoriser :

a^4+b^4

Exercice19 : Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[4]{20x^2-4}-2}{2x^2+x-3}$$

Solutions : $\dfrac{\sqrt[4]{20x^2-4}-2}{2x^2+x-3}=\dfrac{\sqrt[4]{20x^2-4}-\sqrt[4]{16}}{2x^2+x-3}$

$$=\frac{20x^2-4-16}{(2x^2+x-3)\left(\sqrt[4]{\left(20x^2-4\right)^3}+\sqrt[4]{\left(20x^2-4\right)^2 4}+\sqrt[4]{\left(20x^2-4\right)16}+\sqrt[4]{16^3}\right)}$$

$$=\frac{20(x+1)}{(2x+3)\left(\sqrt[4]{(20x^2-4)^3}+\sqrt[4]{(20x^2-4)^2}4+\sqrt[4]{(20x^2-4)16}+\sqrt[4]{16^3}\right)}$$

Donc : $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[4]{20x^2-4}-2}{2x^2+x-3}=\frac{1}{8}$

Exercice20: 1)simplifier les expressions suivantes : $A=\frac{\sqrt[15]{3^5}\times\sqrt[3]{9}\times\left(\sqrt[5]{9}\right)^3}{\sqrt[5]{3}}$

et $B=\frac{\sqrt[4]{9}\times\sqrt{\sqrt[3]{3^3\times\sqrt{9}}}}{\sqrt[5]{81}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

a) $\sqrt[3]{x-1}=3$ b) $x^{\frac{2}{3}}-7x^{\frac{1}{3}}-8=0$

c) $\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-12=0$

2)Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[5]{x^5+x^2+1}$ b) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

c) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

Solution :

$$A=\frac{\sqrt[15]{3^5}\times\sqrt[3]{9}\times\left(\sqrt[5]{9}\right)^3}{\sqrt[5]{3}}=\frac{(3^5)^{\frac{1}{15}}\times(3^2)^{\frac{1}{3}}\times\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^3}{3^{\frac{1}{5}}}=\frac{3^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{2}{3}}\times3^{\frac{3}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}}$$

$$A=\frac{3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}}=\frac{3^{\frac{8}{3}}}{3^{\frac{1}{5}}}=3^{\frac{8}{3}-\frac{1}{5}}=3^{\frac{37}{15}}=\left(\sqrt[15]{3}\right)^{37}$$

$$B=\frac{\sqrt[4]{9}\times\sqrt{\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt{9}}}{\sqrt[5]{81}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}=\frac{(3^2)^{\frac{1}{4}}\times(3^4)^{\frac{1}{6}}}{(3^4)^{\frac{1}{5}}\times(3)^{\frac{1}{8}}}=\frac{3^{\frac{1}{2}}\times3}{(3^4)^{\frac{1}{5}}\times(3)^{\frac{1}{8}}}$$

$$B=\frac{3^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{4}{5}}\times(3)^{\frac{1}{8}}}=3^{\frac{3}{2}}\times3^{-\frac{4}{5}}\times(3)^{-\frac{1}{8}}=3^{\frac{3}{2}-\frac{4}{5}-\frac{1}{8}}=3^{\frac{11}{8}-\frac{4}{5}}=3^{\frac{55}{40}-\frac{32}{40}}$$

$$B=3^{\frac{23}{40}}=\sqrt[40]{3^{23}}$$

2) a) $\sqrt[3]{x-1}=3\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3=3^3\Leftrightarrow x-1=27$

$\Leftrightarrow x=28$ donc : $S=\{28\}$

b) $x^{\frac{2}{3}}-7x^{\frac{1}{3}}-8=0\Leftrightarrow\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2-7x^{\frac{1}{3}}-8=0$

on pose : $x^{\frac{1}{3}}=X$ donc : $X^2-7X-8=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times1\times(-8)=49+32=81>0$

$x_1=\frac{7+9}{2\times1}=\frac{16}{2}=8$ et $x_2=\frac{7-9}{2\times1}=\frac{-2}{2}=-1$

Donc : $x^{\frac{1}{3}}=8$ ou $x^{\frac{1}{3}}=-1$

$x^{\frac{1}{3}}=-1$ n'a pas de solutions

$x^{\frac{1}{3}}=8\Leftrightarrow\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3=(8)^3\Leftrightarrow x=512$

Donc : $S=\{512\}$

c) $\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-12=0$ on a $x\geq0$

$\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-12=0\Leftrightarrow\sqrt[6]{x^3}-\sqrt[6]{x^2}-12=0$

on pose : $\sqrt[6]{x}=X$ donc : $X^3+X^2-12=0$

on remarque que 2 est racine de cette équation

donc : $X^3+X^2-12=(X-2)\left(X^2+3X+6\right)$

$X^3+X^2-12=0\Leftrightarrow X=2$ ou $X^2+3X+6=0$

$\Delta=-15\prec0$ donc $X^2+3X+6=0$ n'a pas de solutions

Donc : $X=2\Leftrightarrow\sqrt[6]{x}=2\Leftrightarrow x=2^6=64$

Donc : $S=\{64\}$

2) a) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[5]{x^5+x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[5]{x^5}=+\infty$

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ on a $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

b) $$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x}+1^2\right)}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x}+1^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-1^3\right)}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x}+1^2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x}+1^2\right)}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x}+1^2\right)}=\frac{1}{1+1\times1+1}=\frac{1}{3}$$

c) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3-(1)^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)=1\times3=3$$

Exercice 21:

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^4 = 16$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(x-1)^3 = -27$

5) Puissance rationnelle :

5.1 Puissance entier

Rappelle : Soit x un réel et n un entier naturel non nul on a : $x^n = \underbrace{x \times x \times \ldots \times x}_{nfois}$ et ($x \neq 0$)

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

5.2 Puissance rationnelle

Propriété : Pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout entier non nul q on pose : $\sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$

Définition :

Soit x un réel positif et r un rationnel ($r \in \mathbb{Q}$) ;

$r = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}*$ on pose :

$$x^r = x^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$$

Exemple : $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$

$$2^{-\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{2^{-2}} = \sqrt[7]{\frac{1}{2^2}} = \sqrt[7]{\frac{1}{4}}$$

Propriétés

Soit x et y deux réels positifs, r et r' des rationnels on a :

1.	$x^{r+r'} = x^r \times x^{r'}$
2.	$x^{r \times r'} = (x^r)^{r'} = (x^{r'})^r$
3.	$x^{-r'} = \frac{1}{x^{r'}} \quad (x \neq 0)$
4.	$x^{r-r'} = \frac{x^r}{x^{r'}} \quad (x \neq 0)$
5.	$(xy)^r = x^r y^r$
6.	$\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$

Exercice22 : Considérons la fonction f définie par : $f(x) = x\cos\frac{1}{x}$; $si\ x \neq 0$ et $f(0) = 0$

1)Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$

2) Etudier la continuité de f sur les intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$ et est ce f est continue sur $\mathbb{R}$

3) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ **Solution :** 1) $x \in \mathbb{R}^*$ $\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$

donc : $|x|\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$ donc : $\left|x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$

donc : $-|x| \leq f(x) \leq |x|$

et puisque : $\lim_{x\to 0}|x| = 0$ et $\lim_{x\to 0} -|x| = 0$

Alors : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$

Donc : f est continue en $x_0 = 0$

2)on a la fonction : $f_1 : x \to \frac{1}{x}$ continue sur les intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$ et les fonctions : $f_2 : x \to \cos x$ et $f_3 : x \to x$ sont continués sur les intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$

Donc : $f = f_3 \times (f_2 \circ f_1)$ est continue sur les intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$

Et puisque : f est continue en $x_0 = 0$

Alors f est continue sur $\mathbb{R}$

3) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$?

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ et $x \to \cos x$ est continue en $x_0 = 0$

Donc $\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x} = \cos 0 = 1$

Et puisque : $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

Alors $\lim_{x\to+\infty} x\cos\frac{1}{x} = +\infty$

Exercice23 : soient f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ tels que f est bornée et g continue sur $\mathbb{R}$;Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées sur $\mathbb{R}$

Solution :1) f est bornée sur $\mathbb{R}$ donc il existent deux réels m et M tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$

$m \leq f(x) \leq M$

Donc : $f(x) \in [m;M]$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Donc : $g(f(x)) \in g([m;M])$ $\forall x \in \mathbb{R}$

et puisque g est continue sur $\mathbb{R}$ alors g est continue sur $[m;M]$ donc il existent deux réels a et b tel que $g([m;M]) = [a;b]$

donc $g\left(f\left(x\right)\right)\in\left[a;b\right]\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

donc $a\leq g\left(f\left(x\right)\right)\leq b\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

donc $a\leq\left(g\circ f\right)\left(x\right)\leq b\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc $g\circ f$ sont bornée sur $\mathbb{R}$

2)la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ donc :

$g\left(\mathbb{R}\right)=I$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$

et puisque f est bornée sur $\mathbb{R}$ Donc :

$f\left(y\right)\in\left[m;M\right]\ \ \forall y\in I$

Donc : $f\left(g\left(x\right)\right)\in\left[m;M\right]\ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $m\leq\left(f\circ g\right)\left(x\right)\leq M\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc $f\circ g$ sont bornée sur $\mathbb{R}$

Exercice 24: Considérons la fonction f continue Sur l'intervalle $\left[a;b\right]$ et x_1 et x_2 et x_3 des nombres de l'intervalle $\left[a;b\right]$

Montrer que l'équation :

$3f\left(x\right)=f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+f\left(x_3\right)$ admet au moins une solution dans $\left[a;b\right]$

Solution :

On considéré la fonction g définie sur $\left[a;b\right]$par

$g\left(x\right)=3f\left(x\right)-\left(f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+f\left(x_3\right)\right)$

la fonction g est continue sur l'intervalle $\left[a;b\right]$

soit $f\left(\alpha\right)$le plus petit des nombres $f\left(x_1\right);f\left(x_2\right)$; $f\left(x_3\right)$et soit $f\left(\beta\right)$le plus grand des nombres $f\left(x_1\right);f\left(x_2\right)$et $f\left(x_3\right)$

On a : $g\left(\alpha\right)=3f\left(\alpha\right)-\left(f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+f\left(x_3\right)\right)$

$g\left(\alpha\right)=\left(f\left(\alpha\right)-f\left(x_1\right)\right)+\left(f\left(\alpha\right)-f\left(x_2\right)\right)+\left(f\left(\alpha\right)-f\left(x_3\right)\right)$

Donc : $g\left(\alpha\right)\leq 0$

De même **:** on a : $g\left(\beta\right)=3f\left(\beta\right)-\left(f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+f\left(x_3\right)\right)$

$g\left(\alpha\right)=\left(f\left(\beta\right)-f\left(x_1\right)\right)+\left(f\left(\beta\right)-f\left(x_2\right)\right)+\left(f\left(\beta\right)-f\left(x_3\right)\right)$

Donc : $g\left(\beta\right)\geq 0$

et puisque g est continue sur$\left[a;b\right]$

Donc : d'après le **(T.V.I)** il existe un réel c dans $\left[a;b\right]$ tel que : g(c) = 0

Cad $3f\left(c\right)=f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+f\left(x_3\right)$

Donc l'équation $3f\left(x\right)=f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+f\left(x_3\right)$ admet au moins une solution dans $\left[a;b\right]$

Exercice25 : soient f et g sont deux fonctions continues sur$\left[a;b\right]$ tels que :

$0\prec g\left(x\right)\prec f\left(x\right)\quad\forall x\in\left[a;b\right]$

Montrer que :

$\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^*\,/\,\forall x\in\left[a;b\right];\left(1+\lambda\right)g\left(x\right)\leq f\left(x\right)$

Solution : Montrons que :

$\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^*\,/\,\forall x\in\left[a;b\right];\left(1+\lambda\right)g\left(x\right)\leq f\left(x\right)$ Cad :

$\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^*\,/\,\forall x\in\left[a;b\right];\lambda\leq\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}-1$

On considéré la fonction h définie sur $\left[a;b\right]$par

$h\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}-1$la fonction h est continue sur l'intervalle $\left[a;b\right]$car f et g sont continues sur l'intervalle $\left[a;b\right]$et $g\left(x\right)\neq 0\ \forall x\in\left[a;b\right]$ Donc la fonction h admet un minimum λ Cad il existe $x_0\in\left[a;b\right]$ tel que :

$\lambda=h\left(x_0\right)=\dfrac{f\left(x_0\right)}{g\left(x_0\right)}-1$ et $\lambda\leq h\left(x\right)\quad\forall x\in\left[a;b\right]$

On a : $0\prec g\left(x_0\right)\prec f\left(x_0\right)$ donc $0\prec\dfrac{f\left(x_0\right)}{g\left(x_0\right)}-1$

donc : $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ donc :

$\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^*\,/\,\forall x\in\left[a;b\right];\left(1+\lambda\right)g\left(x\right)\leq f\left(x\right)$

Exercice 26: Considérons la fonction f continue Sur l'intervalle $\left[a;b\right]$ tel que : $f\left(a\right)\prec 0$

il existe $x_0\in\left]a;b\right[$ tel que : $f\left(x_0\right)=\dfrac{a-x_0}{b-x_0}$

Solution :

On a : $f\left(x_0\right)=\dfrac{a-x_0}{b-x_0}\Leftrightarrow\left(b-x_0\right)f\left(x_0\right)-\left(a-x_0\right)=0$

On considéré la fonction g définie par :

$g\left(x\right)=\left(b-x\right)f\left(x\right)-\left(a-x\right)$;la fonction g est continue sur l'intervalle $\left[a;b\right]$car c'est la somme de fonctions continues sur $\left[a;b\right]$

On a : $g\left(a\right)=\left(b-a\right)f\left(a\right)\prec 0$ car $f\left(a\right)\prec 0$

Et $b-a \succ 0$ et on a : $g(b)=b-a \succ 0$

Donc : d'après le **(T.V.I)** il existe $x_0 \in]a;b[$ tel que : $g(x_0)=0$ cad $f(x_0)=\frac{a-x_0}{b-x_0}$

Exercice 27 : Soit la fonction $f(x)=x^2+x+1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1- Déterminer $J = f([0,1])$

2- Montrer que f admet une fonction réciproque de J vers [0,1] et déterminer $f^{-1}(x)$ $\forall x \in J$

Exercice 28 : Soit la fonction $g(x)=x-2\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

1- Montrer que g est strictement croissante sur [1, +∞[puis déterminer $J = g([1, +\infty[)$

2- Montrer que g admet une fonction réciproque de J vers [1, +∞[et déterminer $g^{-1}(x)$ $\forall x \in J$

Exercice 29 : Soit la fonction $h(x)=\frac{x}{1-x^2}$

Montrer que h est une bijection de] − 1,1[vers un intervalle J qu'il faut déterminer et déterminer et déterminer $h^{-1}(x)$ $\forall x \in J$

Exercice 30 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $\sqrt[3]{x}-x=0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt[3]{x}-5\sqrt[6]{x}+6=0$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x-2} \succ 1$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien