Année scolaire : 2022 – 2023	Résumé de géométrie analytique dans L'espace	AGOUZAL 2 BPCF

Dans tout ce qui va suivre, l'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

Produit scalaire

Soient $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ deux vecteurs et $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$ de l'espace.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ $\quad\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A\right)$

$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

Un plan P de vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$ non nul admet une équation cartésienne de la forme,

$ax+by+cz+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$

$M(x,y,z)\in P(A;\vec{n})\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$

La distance du point $A(x_A,y_A,z_A)$ au plan (P) d'équation $ax+by+cz+d=0$ est :

$$d\left(A,(P)\right)=\frac{\left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

La sphère

Soit S(Ω,R) la sphère de centre Ω(a, b, c) et de rayon R

L'équation cartésienne de la sphère S(Ω,R) est :

$M(x,y,z)\in S(\Omega,R)\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

Soit (S) la sphère définie par l'un de ces diamètres [AB] avec $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$

$M(x,y,z)\in(S)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$ d'équation cartésienne

$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$

Soit (S) l'ensemble des points M(x, y, z) tels que :

$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ avec a, b, c et d sont des réels.

Si $a^2+b^2+c^2-4d\geq 0$ (S) est la sphère de centre $\Omega(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$

* **Intersection d'une sphère et d'un plan**

Soit S(Ω,R) la sphère de centre Ω(a, b, c) et de rayon R

H le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (P).

On pose $d=d\left(\Omega,(P)\right)$

Si $d>R$, alors $(P)\cap(S)=\varnothing$

Si $d=R$, alors $(P)\cap(S)=\left\{H\right\}$ (P) est tangent à (S)

Si $d<R$, alors $(P)\cap(S)=(\Gamma)$

(Γ) est le cercle de rayon $\sqrt{R^2-d^2}$ et de centre H.

Pour déterminer les coordonnées de H (résoudre le système d'équation du plan (P) et une représentation paramétrique de la droite passant par Ω et orthogonale à (P))

Equation du plan tangent à une sphère en un point

Le plan (T) tangent à la sphère S(Ω,R) en un point A

$M(x,y,z)\in(T)\Leftrightarrow\overrightarrow{A\Omega}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

* **Intersection d'une sphère et d'une droite**

Soient (S) la sphère de centre Ω et de rayon R, (Δ) une droite de l'espace et H le projeté orthogonal du point Ω sur la droite (Δ).

On pose $d=\Omega H$ $\quad d=d\left(\Omega,(\Delta)\right)$

Si $d>R$, alors $(P)\cap(S)=\varnothing$

Si $d=R$, alors $(P)\cap(S)=\left\{H\right\}$ (Δ) est tangent à (S) en H

Si $d<R$, alors la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points.

Pour déterminer les coordonnées des deux points ou de H (résoudre le système d'équation la sphère (S) et d'une représentation paramétrique de la droite (Δ))

Produit vectoriel

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace

Les coordonnées du vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$:

$$\vec{u}\wedge\vec{v}\left(\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\right)$$

Le plan (ABC) définie par A,B et C non alignés

$M(x,y,z)\in(ABC)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AB}\right)=0$

A, B et C ne sont pas alignés $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$

La distance du point A à la droite $\Delta\left(A,\vec{u}\right)$

$$d\left(A,(\Delta)\right)=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$$

La surface du triangle ABC et de parallélogramme ABCD

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$ $\quad S_{ABCD}=\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

(P) et (P′) deux plans dans l'espace $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ deux vecteurs normaux respectivement à (P) et (P′)

1) $(P)\perp(P')\Leftrightarrow\vec{n}\cdot\vec{n}'=0$

2) $(P)//(P')\Leftrightarrow\vec{n}\wedge\vec{n}'=\vec{0}$

3) $\vec{n}\wedge\vec{n}'\neq\vec{0}\Leftrightarrow(P)\cap(P')=D(\vec{n}\wedge\vec{n}')$ $\quad\vec{n}\wedge\vec{n}'$ est un vecteur directeur de la droite (D)

4) $(P)\perp D'(\vec{u})\Leftrightarrow\vec{n}\wedge\vec{u}=0$ $\quad\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (D′)

5) $(P)//D'(\vec{u})\Leftrightarrow\vec{n}\cdot\vec{u}=0$