

TABLE DES MATIERES

- I.** EXERCICE N° 1 : SUITE DE LA FORME : $u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$.
- II.** EXERCICE N° 2 : PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE – SPHERE – PRODUIT VECTORIEL
- III.** EXERCICE N° 3 : NOMBRES COMPLEXES .
- IV.** EXERCICE N° 4 : PROBABILITE .
- V.** EXERCICE N° 5 : FONCTION LOGARITHME ET SUITE DE LA FORME : $u_{n+1} = f(u_n)$.

01

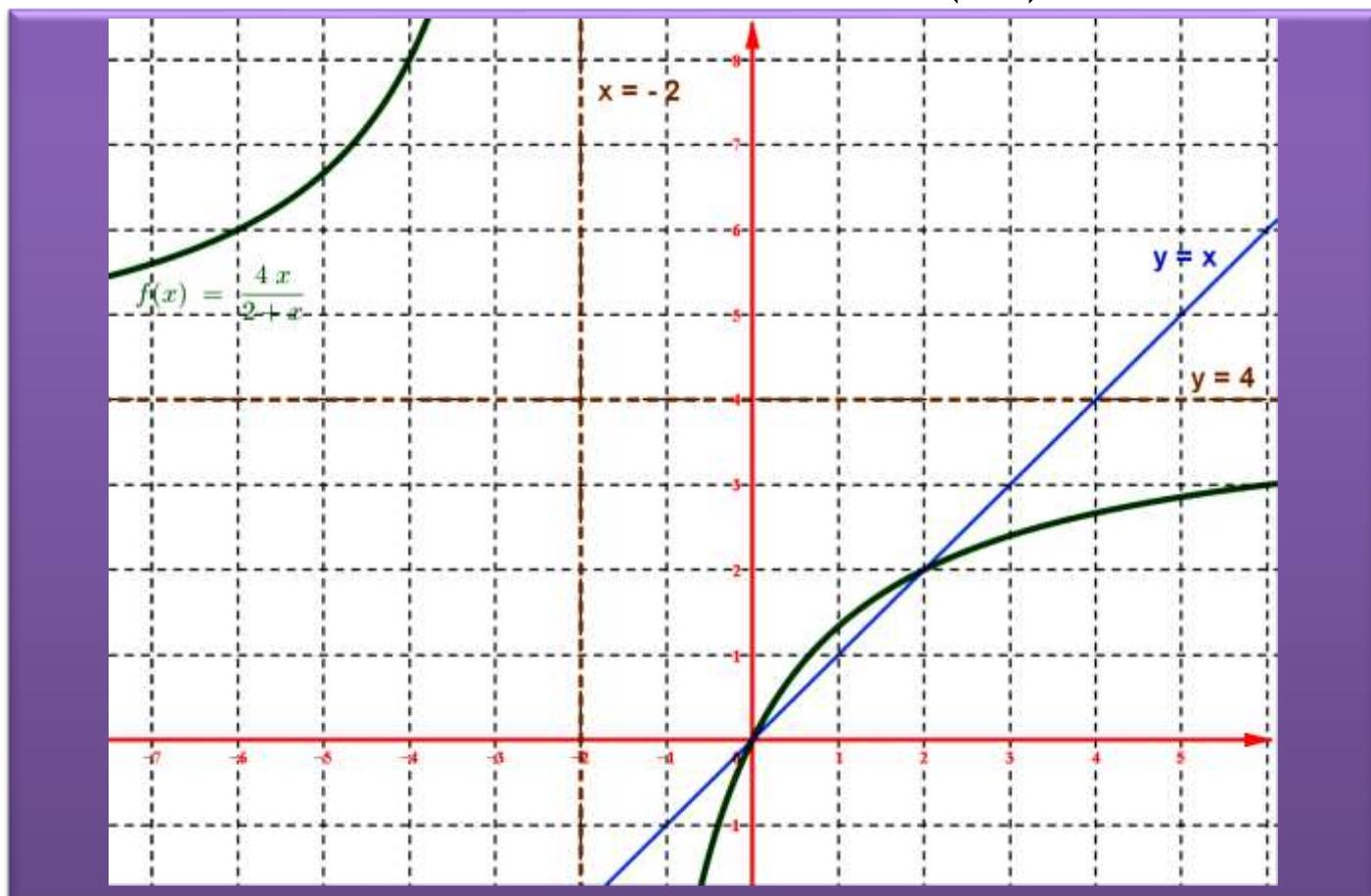
Le but de cet exercice d'étudier la convergence de (u_n) de quatre manières différentes :

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n}{2+u_n} ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1^{ère} manière :

01. ..

- On considère la fonction suivante : $f(x) = \frac{4x}{2+x}$.
- (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .



- a.** Déterminer graphiquement l'intersection de (C_f) et la droite (D) d'équation $(D): y = x$.
- b.** Déterminer graphiquement l'image de $I = [1, 3]$ par la fonction f .
- c.** Placer u_0 et u_1 et u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses ; puis donner la conjecture obtenue pour l'encadrement de la suite (u_n) la monotonie de (u_n) et la limite de (u_n) .

2^{ème} manière :

01. Calculer u_1 et u_2 .

02. Démontrer que : $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n de \mathbb{N} .

03. Montrer que : (u_n) est croissante.

04. On déduit la convergence de (u_n) .

3^{ème} manière :

On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$ pour tout n de \mathbb{N} .

01. Calculer : v_0 .

02. Montrer que : la suite (v_n) est géométrique on détermine sa raison q .

03. Donner v_n en fonction de n

04. Donner u_n en fonction de n .

05. Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$; est que (u_n) est convergente.

4^{ème} manière :

01. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq |u_{n+1} - 2| \leq \frac{2}{3} |u_n - 2|$.

02. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq |u_n - 2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

03. On déduit : la limite de la suite (u_n) .

02

L'espace (\mathcal{E}) étant muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) on considère :

- Les points $A(1, 3, -4)$ et $B(1, 7, -2)$ et $C(2, 5, -2)$ et $E(3, 7, -2)$ et $F(1, 5, -2)$.

01. ..

a. Vérifier que : $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

b. Calculer : l'aire du triangle ABC .

c. Montrer que : $2x + y - 2z - 13 = 0$ est une équation du plan ABC .

02. ..

a. Montrer que la distance du point B à la droite (AC) est 2.

- b.** En déduit qu'une équation cartésienne de la sphère (S) de centre B et tangente à la droite (AC) est $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 14y + 4z + 50 = 0$

03.

- a.** Donner une représentation paramétrique de la droite (AC) .
b. En déduit les coordonnées du point H de contact de la droite (AC) et la sphère (S) .

- 04.** On considère la droite (D) définie par le système d'équations suivant : $\frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{2}$ et $z = -2$

- a.** Donner les coordonnées du point I le milieu du segment [EF] .
b. Donner une représentation paramétrique de la droite (D) .
c. Montrer que la droite (D) coupe la sphère (S) en deux points à déterminer leurs coordonnées .

05.

- a.** Donner une équation cartésienne du plan (P) passant par I et comme vecteur normal le vecteur \vec{BI} .
b. Donner une représentation paramétrique du plan (P) .
c. Sans faire des calculs préciser position relative du plan (P) et la sphère (S) et les éléments caractéristiques de leurs intersection .

03

- 01.** Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} l'équation $z^2 - 6\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)z + 9 = 0$. On notera z_1 et z_2 les solutions trouvées , z_1 étant la solution de partie imaginaire positive .

- 02.** Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2 puis donner l'écriture exponentielle de z_1 et de z_2 .

- 03.** Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' - 6\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)y' + 9y = 0$.

- 04.** On considère dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$ les points A et B d'affixes respectivement $a = \frac{3}{2}(\sqrt{3} + i)$ et $b = \frac{3}{2}(\sqrt{3} - i)$.

- Sans calculs expliquer pourquoi les points A et B sont situés sur le cercle de centre O et de rayon 3 .

- 05.** on considère la transformation f du plan (P) qui à tout point M d'affixe z associe le point $f(M) = M'$

d'affixe z' tel que : $z' = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$.

- a.** Déterminer ω l'affixe du point Ω du plan (P) tel que $f(\Omega) = \Omega$; identifier le point Ω .
b. Montrer que : $OM = OM'$.

c. Montrer que : $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$.

d. En déduire la nature de la transformation f et les éléments caractéristique .

06. Le but de cette question de trouver la nature de la transformation f d'une autre façon très simple .

- Donner l'écriture exponentielle de $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
- En déduire une autre écriture de la transformation f puis la nature de la transformation f . (on remarque que : $z' = z' - 0$ et $z = z - 0$).

07. On considère les points C et D d'affixes respectivement $c = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $d = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

- Déterminer c' et d' les affixes de C' et D' tel que $f(C) = C'$ et $f(D) = D'$.
- Montrer que les points C et D et C' et D' sont cocycliques .

08.

a. Calculer $\arg\left(\frac{c'}{d}\right)$ et montrer que les points C' et D sont symétrique par rapport à O .

b. En déduire la nature du triangle CDC'.

04

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

- L'urne U_1 contient trois boules blanches (B) et une boule noire (N) .
- L'urne U_2 contient une boule blanche (B) et deux boules noires (N) .
- On suppose que les boules sont indiscernables au toucher .
- Un dé non truqué avec 6 faces numérotées de 1 à 6 .
- Un notre dé truqué tel que la probabilité d'obtenir 5 est $\frac{1}{3}$.

1^{ère} expérience :

- On lance le dé non truqué :
 - Si le dé donne un numéro d inférieur ou égale à 2 ; on tire une boule dans l'urne U_1
 - Sinon on tire une boules dans l'urne U_2 .

01. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche .

02. On a tiré une boule blanche . Calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1 .

2^{ème} expérience :

- On lance le dé non truqué deux fois successives :
 - Si la somme des numéros obtenus de le premier lancer puis de le deuxième lancer est inférieure ou égale à 7 ; on tire simultanément deux boules dans l'urne U_1 .
 - Sinon on tire successivement et sans remise deux boules dans l'urne U_2 .
 - On considère la variable aléatoire X définie par « le nombre des boules blanches obtenues » .

01. Calculer les probabilités des événements suivants :

- U_1 « le tirage débutera par l'urne U_1 » .
- U_2 « le tirage débutera par l'urne U_2 »

02. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ (ensemble des valeurs prises par X) .

03. Montrer que : $p(X = 2) = \frac{7}{24}$.

04. Donner l'arbre de probabilité qui illustre toutes les situations possibles .

05. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X et l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X .

3^{ème} expérience :

On lance le dé non truqué quatre fois de suite et on désigne la variable aléatoire Y « le nombre de fois le 6 obtenus » .

01. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Y ?

02. Calculer la probabilité de l'événement $(Y = k)$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

03. Donner $E(Y)$ l'espérance mathématique de X et la variance de X .

4^{ème} expérience :

On choisit au hasard l'un des deux dés , les choix étant équiprobables . Et on lance le dé choisi quatre fois de suite .

01. Calculer la probabilité des événements suivants :

A « choisir le dé non truqué et obtenir exactement deux fois 5 » .

B « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux fois 5 » .

02. En déduit $p(C)$ tel que C « obtenir exactement deux 5 » .

05

PARTIE 1 :

On considère :

- la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$.
- Le tableau ci-contre est le tableau de variations de g .

01.

a. Calculer $g(1)$.

b. D'après le tableau , en déduit $g(x) \geq 0$ pour tout x de $]0, +\infty[$

puis que 1 est la seule solution de l'équation $g(x) = 0$.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$g(1)$	$+\infty$

PARTIE 2 :

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{x} \times \ln x ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) unité de mesure 2 cm . (la construction de la courbe sera sur l'annexe 2 voir page 7)

01.

a. Montrer que : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} \ln x = 0$; (on peut poser $t = \sqrt{x}$) est ce que f est continue à droite de

$x_0 = 0$.

b. Montrer que : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu

02. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$..

03.

a. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -\infty$ donner une interprétation géométrique des résultats obtenus .

b. Etudier la position relative de la droite (Δ) d'équation $(\Delta) : y = x$ et la courbe (C_f) .

04.

a. Montrer que : f' la fonction dérivée de f sur $]0, +\infty[$ est $f'(x) = \frac{g(x)}{2\sqrt{x}}$.

b. On déduit le signe de f' sur $]0, +\infty[$; donner le tableau de variations de f .

c. Calculer $f'(1)$ puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu .

05.

a. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J on le détermine .

b. Vérifier que $f(e^2) = e^2 - 2e$ puis calculer les $(f^{-1})'(e^2 - 2e)$.

c. Construire la courbe $(C_{f^{-1}})$ de la fonction réciproque f^{-1} dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

06.

a. Vérifier que : $\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)' = \sqrt{x}$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

b. On utilise une intégration par partie , montrer que $\int_1^e \sqrt{x} \ln x dx = \frac{2e\sqrt{e} + 4}{9}$.

c. Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) et la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

PARTIE 3 :

07. On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
 .

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \geq 1$.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante .

c. On déduit que (u_n) est une suite convergente .

d. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

