Année scolaire : 2022 – 2023	Exercices de préparation à l'examen national 2023	AGOUZAL 2 BPCF – 2BSVT

Exercice 1 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

On considère le point $A(1,-1,-1)$, (D) la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \, (t \in \mathbb{R}) \\ z = -t \end{cases}$ et (S) la sphère d'équation : $x^2+y^2+z^2+4x+2y-6z-11=0$

1) a) Montrer que (S) est la sphère de de rayon 5 et de centre $\Omega(-2,-1,3)$.

b) Vérifier que : $A \in (S)$

2) Soit (P) le plan passant par O et orthogonal à la droite (D)

a) Montrer que $2x+2y-z=0$ est une équation cartésienne du plan (P).

b) Calculer $d(\Omega;(P))$ puis déduire que (P) coupe (S) suivant un cercle (C) de rayon 4.

c) Ecrire une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonal à (P).

d) Montrer que (0, 1, 2) est le triplet de coordonnées du centre H du cercle (C).

3) Soit (D′) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(4;2;3)$

a) Calculer $d(\Omega;(D'))$ et déduire que (D′) est tangente à (S)

b) Déterminer le point de tangence de (D′) et (S).

Exercice 2 :

1) Résoudre dans C l'équation (E): $z^2-4\sqrt{3}z+16=0$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes respectives $a=2\sqrt{3}+2i$ et $b=-2+2i\sqrt{3}$

a) Ecrire a sous forme trigonométrique et montrer que a^{21} est un imaginaire pur.

b) Montrer que l'écriture complexe de la rotation R de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est :

$z'=-iz-2(1+\sqrt{3})+2(\sqrt{3}-1)i$

c) Déduire que l'affixe de point C image du point A par la rotation R est : $c=-2\sqrt{3}-2i$

3) Soit le point D d'affixe $d=2\sqrt{3}-6i$

a – Montrer que les points O, B et D sont alignés.

b – Montrer que $\frac{d-a}{c-a}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

c – Déduire que $AD=AC$ et $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ puis donner la nature du triangle ACD.

4) Montrer que (BD) est la médiatrice du segment $[AC]$

Exercice 3 :

Un sac contient 12 boules, indiscernables au toucher : Trois boules rouges portant chacune le nombre 1, trois boules rouges portant chacune le nombre 2 et six boules vertes portant chacune le nombre 2

On considère l'expérience suivante : On tire successivement et sans remise 2 boules du sac

Soient les événements :

A ″ Obtenir deux boules portant le même nombre″

B ″ Obtenir deux boules de couleurs différentes″

C ″ Obtenir deux boules portant deux nombres dont la somme est 3″

1) Montrer que : $p(A)=\frac{13}{22}$; $p(B)=\frac{6}{11}$; Calculer $p(C)$.

2) a) Montrer que : $p(A\cap B)=\frac{3}{11}$

b) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

3) Sachant que l'événement B est réalisé, calculer la probabilité pour que les deux boules tirées portent le même nombre

4) 2) On répète l'expérience précédente 3 fois de suite avec remise dans l'urne des deux boules tirées après chaque nouveau tirage, et on considère la variable aléatoire X qui est égal au nombre de fois de réalisation de l'événement B.

a) Déterminer les paramètres de la variable aléatoire binomiale X.

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et montrer l'espérance mathématique E(X) est égale à $\frac{18}{11}$

Problème :

I) On considère la fonction g définie sur $I=]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^2-x+1-\ln x$

1) a) Calculer $\lim_{x\to0^+} g(x)$ et montrer que $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

b) Montrer que $g'(x)=\frac{(x-1)(2x+1)}{x}$ $\forall x\in I$

2) a) Dresser le tableau de variations de g sur I

b) Déduire que $g(x)>0$ $\forall x\in I$

II) On considère la fonction f définie sur $I=]0;+\infty[$ par : $f(x)=x+\frac{\ln x}{x}-\ln x$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 1cm)

1) a) Montrer que $\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ et interpréter les résultats géométriquement.

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

c) Montrer que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation $y=x$

2) a) Dresser le tableau de signes de $(1-x)\ln x$

b) Déduire que $\mathbf{f(x) \leq x} \quad \forall \mathbf{x \in I}$ et interpréter les résultats géométriquement.

3) a) Montrer que $\mathbf{f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}} \quad \forall \mathbf{x \in I}$ puis f est strictement croissante sur I

b) Montrer que la droite (Δ) est la tangente à la courbe $\mathbf{(C_f)}$ au point d'abscisse 1

c) Montrer que l'équation $\mathbf{f(x) = 0}$ admet une seule solution α dans $\left]\frac{1}{2};1\right[$

d) Construire la droite (Δ) et la courbe $\mathbf{(C_f)}$.

4) a) Montrer que : $\int_1^{\mathbf{e}} \frac{\ln \mathbf{x}}{\mathbf{x}} \mathbf{dx} = \frac{1}{2}$ et à l'aide d'une intégration par parties montrer que : $\int_1^{\mathbf{e}} \ln \mathbf{x dx} = 1$

b) Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par (C_f) , la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

5) a) Montrer que f admet une fonction réciproque $\mathbf{f^{-1}}$ définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction $\mathbf{f^{-1}}$ est dérivable en 1 et calculer $\left(\mathbf{f}^{-1}\right)'(1)$

c) Montrer que $\mathbf{f}^{-1}\left(\frac{2022}{2023}\right) < 1$

6) On considère la suite (U_n) définie par : $\mathbf{U_{n+1} = f(U_n)} \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{U}_0 = \frac{23}{22}$

a) Montrer que : $\mathbf{U_n} > 1 \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}$

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) Déduire que la suite (U_n) est convergente puis Calculer sa limite.