Année scolaire : 2022 – 2023	Simili -2- 2023	AGOUZAL 2 BPCF – 2BSVT

Exercice 1 :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct, on considère les points A(0;1;1), B(0;0;2) et C(3;0;0).

1) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$

b) En déduire que $2x + 3y + 3z - 6 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2) Soit le point E(0, -1, 3) et (S) l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{ME} = 0$ Montrer que (S) est la sphère de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.

3) Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 2 :

1) Résoudre dans C l'équation : $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2\sqrt{3} + 2i$; $b = 2\sqrt{3} - 2i$; $c = \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2i$

a) Ecrire a et b sous forme trigonométrique et montrer que : $\left(\frac{a}{4}\right)^{2023} + \left(\frac{b}{4}\right)^{2023} = -\sqrt{3}$

b) Montrer que d l'affixe du point D image du point A par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ est $4i$.

c) Montrer que le point D appartient à la droite (BC)

3) Soit (C) l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $\left|z - 2\sqrt{3} + 2i\right| = 4$ montrer que (C) est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 3 :

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \frac{17U_n + 56}{U_n + 18} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad U_0 = 8$$

1) a) Montrer que : $U_n > 7 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(7 - U_n)(U_n + 8)}{U_n + 18} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

c) Montrer que la suite (U_n) est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle $[7;8]$

2) On pose: $V_n = \frac{U_n - 7}{U_n + 8} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ puis écrire V_n en fonction de n.

b) Montrer que : $U_n = \frac{8\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n + 14\right)}{16 - \left(\frac{2}{5}\right)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

puis Calculer $\lim U_n$

Exercice 4 :

Un sac contient quatre boules rouges, deux boules blanches et trois boules noires indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et avec remise **trois** boules du sac.

On considère les événements suivants :

A ″Les trois boules tirées sont de couleurs différentes deux à deux″.

B ″Il 'y a au moins une boule noire parmi les boules tirées″

1) Montrer que : $p(A) = \frac{16}{81}$; $p(B) = \frac{19}{27}$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage fait correspondre le nombre de couleur des boules tirées.

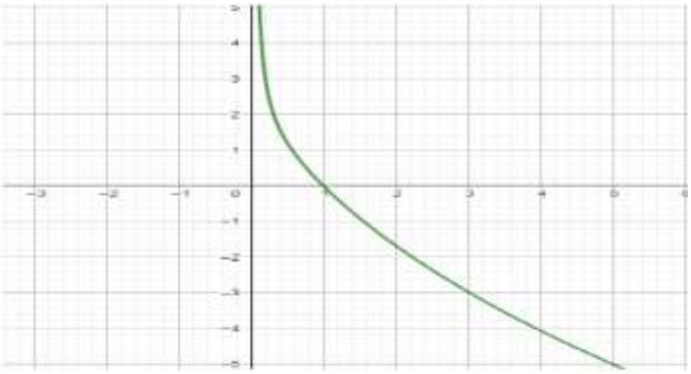
a) Montrer que $P(X = 2) = \frac{2}{3}$

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

Problème :

I) On considère la fonction g définie sur $I =]0;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1$

La représentation graphique de la fonction g est donnée ci-dessous.



1) Calculer g(1)

2) En déduire que $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in]0;1]$ et $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in [1;+\infty[$

II) On considère la fonction f définie sur $I =]0;+\infty[$ par : $f(x) = -2x + (1 + x - x\ln x)\ln x$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Montrer que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et en déduire une interprétation géométrique du résultat.

2) a) Vérifier que : $f(x) = x\ln x\left(\frac{-2}{\ln x} + \frac{1}{x} - \ln x + 1\right)$ pour tout x de **I.**

b) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis en déduire une interprétation géométrique du résultat.

3) a) Montrer que $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in]0,+\infty[$

b) Dresser le tableau des variations de f

4) Construire la courbe (C_f).

5) Déterminer le nombre des solutions de l'équation :

$$\mathbf{x} \in \left]0,+\infty\right[\qquad \ln(\mathbf{x}\mathbf{e}^3) = \mathbf{x}\left[(\ln \mathbf{x})^2 - \ln \mathbf{x} + 2\right]$$

6) a) Montrer que $\mathbf{H} : \mathbf{x} \to \frac{\mathbf{x}^2}{2}\left[(\ln \mathbf{x})^2 - \ln \mathbf{x} + \frac{1}{2}\right]$ est une primitive de $\mathbf{h} : \mathbf{x} \to \mathbf{x}(\ln \mathbf{x})^2$ sur I puis montrer que

$$\int_1^{\mathbf{e}} \mathbf{x}(\ln \mathbf{x})^2 \mathbf{dx} = \frac{\mathbf{e}^2 - 1}{4}$$

b) A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $\int_1^{\mathbf{e}} (\mathbf{x}+1)\ln \mathbf{x}\mathbf{dx} = \frac{\mathbf{e}^2 + 5}{4}$

c) Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par (C_f) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et x = e