Année scolaire : 2022 – 2023	Solution de simili 2023	AGOUZAL 2 BPCF – 2BSVT

Exercice 1 :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct, on considère les points $A(1,1,-3)$, $B(2,3,-1)$, $C(0,2,1)$ et la sphère (S) d'équation : $\mathbf{x^2+y^2+z^2+2x+4y-2z-3=0}$

1) Vérifier que Ω(-1,-2,1) est le centre de la sphère (S) et de rayon 3.

$$\mathbf{x^2+y^2+z^2+2x+4y-2z-3=0}$$

$\mathbf{a}=\frac{2}{-2}$; $\mathbf{b}=\frac{4}{-2}$; $\mathbf{c}=\frac{-2}{-2}$; $d=-3$

$\mathbf{a}=-1$; $\mathbf{b}=-2$; $\mathbf{c}=1$; $d=-3$

$\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2-\mathbf{d}=1+4+1+3=9>0$

Donc le centre de (S) est $\Omega(-1;-2;1)$

D'où $\Omega(-1;-2;1)$ et rayon $\mathbf{R}=\sqrt{9}=3$ d'où $\mathbf{R}=3$

2) a) Montrer que $\overrightarrow{\mathbf{AB}}\wedge\overrightarrow{\mathbf{AC}}=\mathbf{6\vec{i}-6\vec{j}+3\vec{k}}$ et en déduire que A, B, et C sont non alignés.

$C(0,2,1)$; $B(2,3,-1)$; $A(1,1,-3)$

$\overrightarrow{\mathbf{AB}}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathbf{AC}}\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}\wedge\overrightarrow{\mathbf{AC}}=\begin{vmatrix}2&1\\2&4\end{vmatrix}\vec{\mathbf{i}}-\begin{vmatrix}1&-1\\2&4\end{vmatrix}\vec{\mathbf{j}}+\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}\vec{\mathbf{k}}$$

$$=6\vec{\mathbf{i}}-6\vec{\mathbf{j}}+3\vec{\mathbf{k}}$$

D'où $\overrightarrow{\mathbf{AB}}\wedge\overrightarrow{\mathbf{AC}}=6\vec{\mathbf{i}}-6\vec{\mathbf{j}}+3\vec{\mathbf{k}}$

On a $\overrightarrow{\mathbf{AB}}\wedge\overrightarrow{\mathbf{AC}}=6\vec{\mathbf{i}}-6\vec{\mathbf{j}}+3\vec{\mathbf{k}}$ donc $\overrightarrow{\mathbf{AB}}\wedge\overrightarrow{\mathbf{AC}}\neq\vec{0}$

D'où A, B, et C sont non alignés.

b) Vérifier que $2x - 2y + z + 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

Soit $M(x\,;y\,;z)\in(ABC)$

$\overrightarrow{\mathbf{AB}}\wedge\overrightarrow{\mathbf{AC}}\begin{pmatrix}6\\-6\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ABC)

$(\mathbf{ABC}):6\mathbf{x}-6\mathbf{y}+3\mathbf{z}+\mathbf{d}=0$ or

$\mathbf{C}(0;2;1)\in(ABC)$

Donc $6\times0-6\times2+3\times1+d=0$ donc $d=9$

Donc $(ABC): 6x-6y+3z+9=0$

D'où $(ABC): 2x-2y+z+3=0$

3) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC).

On a (D) est Orthogonal au plan (ABC)

On a $\overrightarrow{\mathbf{AB}}\wedge\overrightarrow{\mathbf{AC}}\begin{pmatrix}6\\-6\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ABC)

Don c'est un vecteur directeur de la droite (D)

Soit $M(x\,;y\,;z)\in(D)$ (D) passe par $\Omega(-1;-2;1)$

$$(\mathbf{D}):\begin{cases}\mathbf{x}=-1+6\mathbf{t}\\\mathbf{y}=-2-6\mathbf{t}\\\mathbf{z}=1+3\mathbf{t}\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$$

OU **puisque** $(ABC): 2x-2y+z+3=0$

On a $\vec{\mathbf{n}}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ABC)

Don c'est un vecteur directeur de la droite (D)

Soit $M(x\,;y\,;z)\in(D)$ (D) passe par $\Omega(-1;-2;1)$

$$(\mathbf{D}):\begin{cases}\mathbf{x}=-1+2\mathbf{t}\\\mathbf{y}=-2-2\mathbf{t}\\\mathbf{z}=1+\mathbf{t}\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$$

b) Vérifier que $\mathbf{H}\left(-\frac{7}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ est le point d'intersection de la droite (D) et du plan (ABC)

$(\mathbf{D})\cap(\mathbf{ABC})=\{\mathbf{H}\}$?

Première méthode

$\mathbf{H}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})\in(\mathbf{D})\cap(\mathbf{ABC})$ équivaut à

$$\begin{cases}\mathbf{x}=-1+2\mathbf{t}\\\mathbf{y}=-2-2\mathbf{t}\\\mathbf{z}=1+\mathbf{t}\\2\mathbf{x}-2\mathbf{y}+\mathbf{z}+3=0\end{cases}$$

$2(-1+2\mathbf{t})-2(-2-2\mathbf{t})+1+\mathbf{t}+3=0$

Donc

$$-2+4\mathbf{t}+4+4\mathbf{t}+\mathbf{t}+4=0\Leftrightarrow9\mathbf{t}=-6\Leftrightarrow\mathbf{t}=-\frac{2}{3}$$

$$\begin{cases}\mathbf{x}=-1+2(-\frac{2}{3})=-\frac{7}{3}\\\mathbf{y}=-2-2(-\frac{2}{3})=-\frac{2}{3}\\\mathbf{z}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\end{cases}\quad\text{d'où}\quad\mathbf{H}\left(-\frac{7}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

Deuxième méthode

$\mathbf{H}\in(\mathbf{D})\cap(\mathbf{ABC})$ équivaut à $\mathbf{H}\in(\mathbf{D})\,\text{et}\,\mathbf{H}\in(\mathbf{ABC})$

$$\mathbf{H}\in(\mathbf{D})\quad\begin{cases}-\frac{7}{3}=-1+2\mathbf{t}\\ -\frac{2}{3}=-2-2\mathbf{t}\\ \frac{1}{3}=1+\mathbf{t}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{7}{3}+1=2\mathbf{t}\\ -\frac{2}{3}+2=-2\mathbf{t}\\ \frac{1}{3}-1=\mathbf{t}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathbf{t}=-\frac{2}{3}\\ \mathbf{t}=-\frac{2}{3}\\ \mathbf{t}=-\frac{2}{3}\end{cases}$$

Donc $\mathbf{H}\in(\mathbf{D})$ $\quad$ (ABC) : $2x-2y+z+3=0$

$\mathbf{H}\in(\mathbf{ABC})$?

$$2\left(-\frac{7}{3}\right)-2\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}+3=\frac{-14+4+1+9}{3}=\frac{0}{3}=0$$

Donc $\mathbf{H}\in(\mathbf{ABC})$

D'où $(\mathbf{D})\cap(\mathbf{ABC})=\left\{\mathbf{H}\left(-\frac{7}{3};-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)\right\}$

c) Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (C) de rayon $\sqrt{5}$, dont on déterminera le centre.

(ABC) : $2x-2y+z+3=0$ et $\Omega(-1;-2;1)$

$$\mathbf{d}(\Omega,(\mathbf{ABC}))=\frac{|2\times(-1)-2\times(-2)+1+3|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{6}{3}=2$$

D'où $\mathbf{d}(\Omega,(\mathbf{ABC}))=2$

On a $\mathbf{d}(\Omega,(\mathbf{ABC}))=2$ et $\mathbf{R}=3$

Donc $\mathbf{d}(\Omega,(\mathbf{ABC}))<\mathbf{R}$

Donc le plan (ABC) coupe la sphère selon un cercle (Γ)

De rayon $\mathbf{r}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$ et de centre la projection orthogonale du point Ω sur le plan (ABC) c'est-à-dire le point d'intersection du plan (ABC) et la droite (D) passant par Ω est orthogonal au plan (ABC).

Donc le centre du cercle (Γ) est $\mathbf{H}\left(-\frac{7}{3};-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$

Exercice 2 :

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $\mathbf{Z^2-4Z+5=0}$

$\mathbf{z}^2-4\mathbf{z}+5=0$

$\Delta=(-4)^2-4\times1\times5=-4$

$=(2\mathbf{i})^2$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$\mathbf{z}_1=\frac{4+2\mathbf{i}}{2}=2+\mathbf{i}$ et $\mathbf{z}_2=\overline{\mathbf{z}_1}=2-\mathbf{i}$

D'où $\mathbf{S}=\{2-\mathbf{i};2+\mathbf{i}\}$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O},\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c telles que : $a=2+i$; $b=2-i$; $c=i$

a) Montrer que $\frac{\mathbf{c-a}}{\mathbf{b-a}}=-\mathbf{i}$ écrire $\frac{\mathbf{c-a}}{\mathbf{b-a}}$ sous forme trigonométrique.

$$\frac{\mathbf{c-a}}{\mathbf{b-a}}=\frac{\mathbf{i}-2-\mathbf{i}}{2-\mathbf{i}-2-\mathbf{i}}=\frac{-2}{-2\mathbf{i}}=\frac{1}{\mathbf{i}}=-\mathbf{i}$$

D'ou $\frac{\mathbf{c-a}}{\mathbf{b-a}}=-\mathbf{i}$

On a $\frac{\mathbf{c-a}}{\mathbf{b-a}}=-\mathbf{i}$ donc $\frac{\mathbf{c-a}}{\mathbf{b-a}}=\cos\frac{\pi}{2}-\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{2}$

D'où $\frac{\mathbf{c-a}}{\mathbf{b-a}}=\cos(-\frac{\pi}{2})+\mathbf{i}\sin(-\frac{\pi}{2})$

b – En déduire la nature du triangle ABC et que le point C est l'image du point B par la rotation R de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On a $\frac{\mathbf{c-a}}{\mathbf{b-a}}=\cos(-\frac{\pi}{2})+\mathbf{i}\sin(-\frac{\pi}{2})$

Donc $\left|\frac{\mathbf{c-a}}{\mathbf{b-a}}\right|=1$ et $\arg\frac{\mathbf{c-a}}{\mathbf{b-a}}\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc $\frac{|\mathbf{c-a}|}{|\mathbf{b-a}|}=1$ et $\arg\frac{\mathbf{c-a}}{\mathbf{b-a}}\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc $\frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{AB}}=1$ et $(\overrightarrow{\mathbf{AB}};\overrightarrow{\mathbf{AC}})\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc $\mathbf{AC}=\mathbf{AB}$ et $(\overrightarrow{\mathbf{AB}};\overrightarrow{\mathbf{AC}})\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

D'où le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

1ière méthode : On a $\frac{\mathbf{c-a}}{\mathbf{b-a}}=\cos(-\frac{\pi}{2})+\mathbf{i}\sin(-\frac{\pi}{2})$

On a $e^{-i\frac{\pi}{2}}=\cos(-\frac{\pi}{2})+\mathbf{i}\sin(-\frac{\pi}{2})$ donc $\frac{\mathbf{c-a}}{\mathbf{b-a}}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Donc $\mathbf{c-a}=e^{-i\frac{\pi}{2}}(\mathbf{b-a})\Leftrightarrow R(B)=C$ où R est la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

2ième méthode :

On a $\begin{cases}\mathbf{AC}=\mathbf{AB}\\ (\overrightarrow{\mathbf{AB}};\overrightarrow{\mathbf{AC}})\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\mathbf{R(B)=C}$

3) Soient T la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$

a) Montrer que l'affixe du point D image du point B par la translation T est $d=-i$

$\mathbf{T(B)=D\Leftrightarrow d=b+aff(\overrightarrow{AC})}$

$\mathbf{\Leftrightarrow d=2-i+i-2-i=-i}$

D'où $\mathbf{d=-i}$

b) Montrer que ABDC est un carré.

On a $\mathbf{T(B)=D\Leftrightarrow\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}}$ donc ABDC est un parallélogramme.

Or ABC est un triangle isocèle et rectangle en A donc

Donc $\mathbf{AC}=\mathbf{AB}$ et $(\overrightarrow{\mathbf{AB}};\overrightarrow{\mathbf{AC}})\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

D'où ABDC est un carré.

Exercice 3 :

On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$$U_0 = \frac{3}{2} \text{ et } U_{n+1} = \frac{5U_n}{U_n+4} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) a) Vérifier que $U_{n+1} - 1 = \dfrac{4(U_n-1)}{U_n+4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

puis montrer par récurrence que $U_n > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$U_{n+1} - 1 = \frac{5U_n}{U_n+4} - 1 = \frac{5U_n - U_n - 4}{U_n+4}$$

$$= \frac{4U_n - 4}{U_n+4} = \frac{4(U_n-1)}{U_n+4}$$

D'ou $U_{n+1} - 1 = \dfrac{4(U_n-1)}{U_n+4}$

Pour n = 0 on a $U_0 = \dfrac{3}{2}$ donc $U_0 > 1$

Soit n ∈ ℕ supposons que $U_n > 1$ et montrons que $U_{n+1} > 1$ c'est-à-dire $U_{n+1} - 1 > 0$

On a $U_{n+1} - 1 = \dfrac{4(U_n-1)}{U_n+4}$ et $U_n > 1$

Donc $U_n - 1 > 0$ et $U_n + 4 > 5$

Donc $U_{n+1} - 1 = \dfrac{4(U_n-1)}{U_n+4} > 0$ donc $U_{n+1} - 1 > 0$

D'où $U_n > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) Vérifier que: $U_{n+1} - U_n = \dfrac{U_n(1-U_n)}{U_n+4}$ et montrer que (U_n) est décroissante.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{5U_n}{U_n+4} - U_n$$

$$= \frac{5U_n - U^2{}_n - 4U_n}{U_n+4} = \frac{U_n - U^2{}_n}{U_n+4}$$

D'où $U_{n+1} - U_n = \dfrac{U_n(1-U_n)}{U_n+4}$

On a $U_n > 1$ et $U_n + 4 > 5$

Donc $1 - U_n < 0$ donc $U_n(1-U_n) < 0$

Donc $U_{n+1} - U_n = \dfrac{U_n(1-U_n)}{U_n+4} < 0$

D'où (U_n) est décroissante.

c) En déduire que (U_n) est convergente.

On a (U_n) est décroissante et minorée donc elle est convergente.

2) On considère la suite numérique (V_n) définie par :

$$V_n = \frac{U_n}{U_n - 1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{5}{4}$ et calculer V_n en fonction de n.

$V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1}}{U_{n+1} - 1}$ et **Erreur ! Signet non défini.**

$$V_{n+1} = \frac{\dfrac{5U_n}{U_n+4}}{\dfrac{4(U_n-1)}{U_n+4}} = \frac{5U_n}{4(U_n-1)}$$

$$V_{n+1} = \frac{5}{4}\frac{U_n}{(U_n-1)} = \frac{5}{4}V_n$$

Donc $V_{n+1} = \dfrac{5}{4}V_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{5}{4}$

De premier terme $V_0 = \dfrac{U_0}{U_0 - 1} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2} - 1} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$

et $V_n = V_0\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$ d'où $V_n = 3\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$

b) Montrer que $U_n = \dfrac{3}{3 - \left(\frac{4}{5}\right)^n}$ pour tout n de ℕ

On a $V_n = \dfrac{U_n}{U_n - 1} \Leftrightarrow V_n(U_n - 1) = U_n$

$\Leftrightarrow V_nU_n - V_n = U_n \Leftrightarrow V_nU_n - U_n = V_n$

$\Leftrightarrow U_n(V_n - 1) = V_n \Leftrightarrow U_n = \dfrac{V_n}{V_n - 1}$

$$U_n = \frac{V_n}{V_n - 1} = \frac{3\left(\frac{5}{4}\right)^n}{3\left(\frac{5}{4}\right)^n - 1} = \frac{3\left(\frac{5}{4}\right)^n}{\left(\frac{5}{4}\right)^n\left(3 - \frac{1}{\left(\frac{5}{4}\right)^n}\right)}$$

Donc $U_n = \dfrac{3}{3 - \left(\frac{4}{5}\right)^n}$

D'où $U_n = \dfrac{3}{3 - \left(\frac{4}{5}\right)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim U_n = \frac{3}{3 - \left(\frac{4}{5}\right)^n} = \frac{3}{3-0} = 1 \text{ car } -1 < \frac{4}{5} < 1$$

d'où $\lim U_n = 1$

Exercice 4 :

Quatre boules blanches numérotés : 0, 2, 2, 2
Trois boules noirs numérotés : 1, 1, 2
On tire au hasard successivement et sans remise deux boules du sac.

$$\mathbf{Card}(\Omega) = \mathbf{A}_7^2 = 42$$

4 (2) ; 2 (1) ; 1 (0)

1) a) Montrer que $\mathbf{P(A) = \frac{2}{7}}$ et calculer $\mathbf{P(B)}$.

A ″ Le produit des deux nombres portés par les deux boules tirées est 4″ $2 \times 2 = 4$
A ″ Obtenir deux boules portant chacune le nombre 2″

$$\mathbf{Card}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}_4^2 = 12$$

$$\mathbf{P(A) = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}}$$

B : « La première boule tirée est blanche »
4 B ; 3N

$$\mathbf{Card}(\mathbf{B}) = \mathbf{A}_4^1 \times \mathbf{A}_6^1 = 24$$

$$\mathbf{P(B) = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}}$$

b – Montrer que $\mathbf{P(A \cap B) = \frac{3}{14}}$ les événements A et B sont-ils indépendants en justifiant la réponse

$\mathbf{(A \cap B)}$ est l'événement ″La première boule tirée est blanche et porte le nombre 2 et la deuxième boule porte le nombre 2″

$$\mathbf{card(A \cap B) = A_3^1 \times A_3^1 = 9}$$

$$\mathbf{P(A \cap B) = \frac{9}{42}} \text{ donc } \mathbf{P(A \cap B) = \frac{3}{14}}$$

On a $\mathbf{P(A)P(B) = \frac{2}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{8}{49}}$ et $\mathbf{P(A \cap B) = \frac{3}{14}}$

Donc $\mathbf{P(A)P(B) \neq P(A \cap B)}$ d'où A et B ne sont pas indépendants

2) Soit X la variable aléatoire qui correspond au produit des deux nombres portés par les deux boules tirées. Copier le tableau ci-contre et le compléter en justifiant les réponses.

4 (2) ; 2 (1) ; 1 (0)

$$\mathbf{P(X=0) = \frac{2(A_1^1 \times A_6^1)}{42} = \frac{2}{7}} \quad ; \quad \mathbf{P(X=1) = \frac{A_2^2}{42} = \frac{1}{21}}$$

$$\mathbf{P(X=2) = \frac{2(A_4^1 \times A_2^1)}{42} = \frac{8}{21}} \quad ; \quad \mathbf{P(X=4) = P(A) = \frac{2}{7}}$$

X = k	0	1	2	4
P(X=k)	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{2}{7}$

(Remarque $\mathbf{\frac{2}{7} + \frac{1}{21} + \frac{8}{21} + \frac{2}{7} = \frac{21}{21} = 1}$

Problème :

I) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathbf{g(x) = 1 - (x+1)e^{-x}}$$

1) a) Montrer que $\mathbf{g'(x) = xe^{-x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{g'(x) = 0 - \left[(x+1)'e^{-x} + (x+1)(-e^{-x})\right]}$$

$$\mathbf{g'(x) = 0 - \left[(x+1)'e^{-x} + (x+1)(-e^{-x})\right]}$$

$$\mathbf{g'(x) = -e^{-x} - (x+1)(-e^{-x})}$$

$$\mathbf{g'(x) = e^{-x}(-1 + x + 1) = xe^{-x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{g'(x) = xe^{-x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) Montrer que g est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$.

Le signe de $\mathbf{g'(x)}$ est celui de x car $\mathbf{e^{-x} > 0} \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\forall x \in [0, +\infty[$ donc $\mathbf{x \geq 0}$ donc $\mathbf{g'(x) \geq 0}$

D'où g est croissante sur $[0, +\infty[$

$\forall x \in]-\infty, 0]$ donc $\mathbf{x \leq 0}$ donc $\mathbf{g'(x) \leq 0}$

D'où g est décroissante sur $]-\infty, 0]$.

2) Calculer g(0) et en déduire que $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\mathbf{g(0) = 1 - (0+1)e^{-0} = 1 - 1 = 0}$ D'où $\mathbf{g(0) = 0}$

g est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$ donc $\mathbf{g(0) = 0}$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathbf{g(x) \geq g(0)}$ d'où $\mathbf{g(x) \geq 0} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

1) a) Montrer que $\mathbf{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$ et $\mathbf{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x - 1 + (x+2)e^{-x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x - 1 + xe^{-x} + 2e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} x - 1 + \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x - 1 + \frac{1}{\frac{e^x}{x}} + \frac{2}{e^x} = +\infty \quad \text{car} \quad \mathbf{\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0}$$

$$\mathbf{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty} \quad \text{d'où} \quad \mathbf{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x - 1 + (x+2)e^{-x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x - 1 + (x+2)\frac{1}{e^x} = -\infty$$

Car $\lim_{x \to -\infty} x - 1 = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} (x+2)\frac{1}{e^x} = -\infty$

D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$ et montrer que (C) est au–dessus de (D) sur $[-2,+\infty[$ et en dessous de (D) sur $]-\infty,-2]$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1) = \lim_{x\to+\infty} (x+2)e^{-x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} + \frac{2}{e^x} = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1) = 0$$

D'où la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$

$$f(x)-(x-1) = (x+2)e^{-x} \qquad e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x)-(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

$$\forall x \in [-2,+\infty[\quad f(x)-(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq x-1$$

D'où (C) est au–dessus de (D) sur $[-2,+\infty[$

$$\forall x \in]-\infty;-2] \quad f(x)-(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq x-1$$

D'où (C) est en dessous de (D) sur $]-\infty,-2]$

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1+(x+2)e^{-x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{1}{x} + \left(1+\frac{2}{x}\right)\frac{1}{e^x} = +\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \frac{2}{x} = 1$ D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ d'où la courbe (C) admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2) a) Montrer que $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x - 1 + (x+2)e^{-x}$$

$$f'(x) = 1 + (x+2)'e^{-x} + (x+2)(e^{-x})'$$

$$= 1 + e^{-x} + (x+2)(-e^{-x})$$

$$= 1 - (x+1)e^{-x} = g(x)$$

D'où $f'(x) = g(x)$

b) Dresser le tableau de variations de f.

On a $f'(x) = g(x)$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

Or $g(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ donc $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

X	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et en admettant que $e\sqrt{e} < 5$ montrer que $-\frac{3}{2} < \alpha < -1$.

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $0 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$

$$f(-1) = -1 - 1 + (-1+2)e^{1} = e - 2$$

$$f(-1) = e - 2 > 0$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2} - 1 + \left(-\frac{3}{2} + 2\right)e^{\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}e\sqrt{e} = \frac{e\sqrt{e} - 5}{2} \qquad \text{or} \quad e\sqrt{e} < 5$$

Donc $f\left(-\frac{3}{2}\right) < 0$ donc $f\left(-\frac{3}{2}\right)f(-1) < 0$

D'où $-\frac{3}{2} < \alpha < -1$

b) Montrer que $I(0, 1)$ est le point d'inflexion pour la courbe (C).

On a $f'(x) = g(x)$

Donc $f''(x) = g'(x)$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Or $\forall x \in [0,+\infty[\quad g'(x) \geq 0$ et

$\forall x \in]-\infty,0] \quad g'(x) \leq 0$

Donc $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\forall x \in [0,+\infty[\quad f''(x) \geq 0$ et

$\forall x \in]-\infty,0] \quad f''(x) \leq 0$ et $f(0) = 1$

D'où $I(0, 1)$ est le point d'inflexion pour la courbe (C).

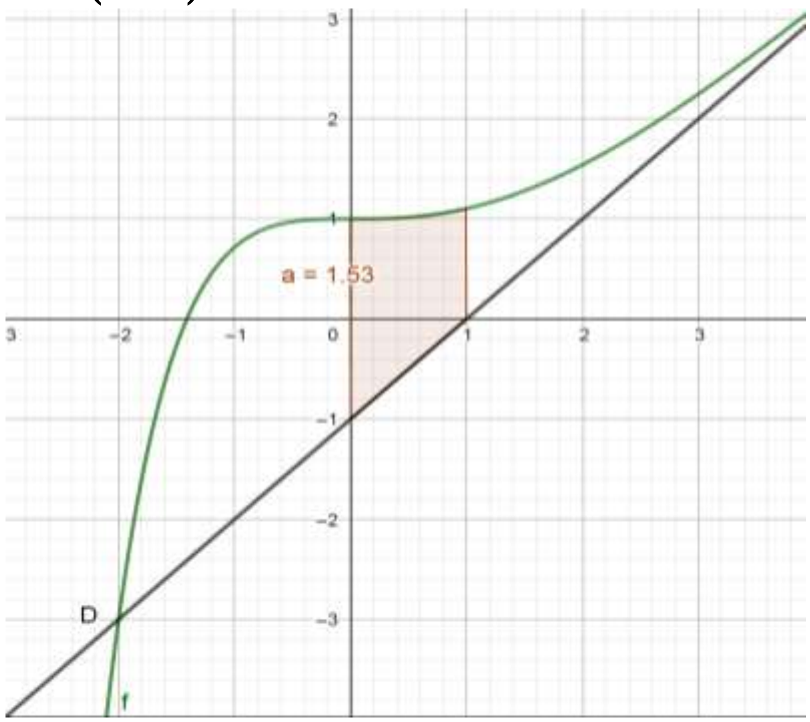
c) Montrer que $y = 1$ est l'équation de la tangente au point $I(0, 1)$ à la courbe (C).

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

et $f(0) = 1$ et $f'(0) = g(0) = 0$

D'où y =1 est l'équation de la tangente au point $I(0, 1)$ à la courbe (C).

d – Construire dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite (D) et la courbe (C).



4) a – En utilisant une intégration par partie montrer que $\int_0^1 (x+2)e^{-x}dx = 3-\frac{4}{e}$.

$u(x) = x+2 \qquad\qquad u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{-x} \qquad\qquad v(x) = -e^{-x}$

$\int_0^1 (x+2)e^{-x}dx = \left[-(x+2)e^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx$

$= \left[-(x+2)e^{-x}\right]_0^1 - \left[e^{-x}\right]_0^1$

$= -3e^{-1} + 2 - e^{-1} + 1 = 3-\frac{4}{e}$

$\int_0^1 (x+2)e^{-x}dx = 3-\frac{4}{e}$

b – Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe (C) et les droites d'équations $y = x - 1$ et $x = 0$ et $x = 1$.

$A = \int_0^1 |f(x)-(x-1)|dx \times 2cm \times 2cm$ ((C) est au–dessus de (D) sur $[-2,+\infty[$)

$\int_0^1 f(x)-(x-1)dx = \int_0^1 (x+2)e^{-x}dx = 3-\frac{4}{e}$

Donc $A = (3-\frac{4}{e}) \times 4cm^2 = (12-\frac{16}{e})cm^2$

D'où $A = (12-\frac{16}{e})cm^2$