Exercice 1 : (2024 SN) (3pts)

On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$$U_0 = 4 \text{ et } U_{n+1} = \frac{4U_n - 2}{1+U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) a) Vérifier que $U_{n+1} = 4 - \frac{6}{1+U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$4 - \frac{6}{1+U_n} = \frac{4(1+U_n)-6}{1+U_n} = \frac{4U_n - 2}{1+U_n}$$

D'où $U_{n+1} = 4 - \frac{6}{1+U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) Montrer par récurrence que $2 \le U_n \le 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour n = 0 on a $U_0 = 4$ donc $2 \le U_0 \le 4$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $2 \le U_n \le 4$ et montrons que $2 \le U_{n+1} \le 4$

On a $2 \le U_n \le 4$ et $U_{n+1} = 4 - \frac{6}{1+U_n}$

Donc $3 \le 1 + U_n \le 5$ donc $\frac{1}{5} \le \frac{1}{1+U_n} \le \frac{1}{3}$

Donc $-\frac{6}{3} \le -\frac{6}{1+U_n} \le -\frac{6}{5}$

Donc $4-2 \le 4 - \frac{6}{1+U_n} \le 4 - \frac{6}{5}$

Donc $2 \le U_{n+1} \le \frac{14}{5} \le 4$

D'où $2 \le U_n \le 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) a) Montrer que $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 1)(2-U_n)}{1+U_n}$

Pour tout n de N.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{4U_n - 2}{1+U_n} - U_n$$

$$= \frac{4U_n - 2 - U_n - U_n^2}{1+U_n} = \frac{-U_n^2 + 3U_n - 2}{1+U_n}$$

Or $(U_n - 1)(2 - U_n) = 2U_n - U_n^2 + U_n - 2$

Donc $(U_n - 1)(2 - U_n) = -U_n^2 + 3U_n - 2$

D'où $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 1)(2-U_n)}{1+U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que (U_n) est décroissante et en déduire que (U_n) est convergente.

On a $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 1)(2-U_n)}{1+U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Et $2 \le U_n \le 4$ donc $3 \le 1 + U_n \le 5$

$1 \le U_n - 1 \le 3$ et $-2 \le 2 - U_n \le 0$

Donc $\frac{(U_n - 1)(2-U_n)}{1+U_n} \le 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc $U_{n+1} - U_n \le 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc (U_n) est décroissante.

On a (U_n) est décroissante et minorée par 2 donc elle est convergente.

3) Soit (V_n) une suite numérique définie par :

$V_n = \frac{2-U_n}{1-U_n}$ pour tout n de N.

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

$V_{n+1} = \frac{2}{3} V_n$? on a $V_n = \frac{2-U_n}{1-U_n}$

$V_{n+1} = \frac{2-U_{n+1}}{1-U_{n+1}}$ donc

$$V_{n+1} = \frac{2 - \frac{4U_n - 2}{1+U_n}}{1 - \frac{4U_n - 2}{1+U_n}} = \frac{2 + 2U_n - 4U_n + 2}{1 + U_n - 4U_n + 2}$$

Donc $V_{n+1} = \frac{2(2-U_n)}{3(1-U_n)}$ donc $V_{n+1} = \frac{2}{3} V_n$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b) Montrer que $U_n = 1 + \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On a $V_n = \frac{2-U_n}{1-U_n} \Leftrightarrow (1-U_n)V_n = 2 - U_n$

$\Leftrightarrow V_n - U_n V_n = 2 - U_n \Leftrightarrow U_n(1-V_n) = 2 - V_n$

$\Leftrightarrow U_n = \frac{1+1-V_n}{1-V_n} = 1 + \frac{1}{1-V_n}$

Donc $U_n = 1 + \frac{1}{1-V_n}$ et (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$; $V_0 = \frac{2-U_0}{1-U_0} = \frac{2-4}{1-4} = \frac{2}{3}$

$$V_n = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

D'où $U_n = 1 + \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

c) Calculer la limite de la suite (U_n)

On a $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$ car $0 < \frac{2}{3} < 1$

Donc $\lim U_n = 1 + \frac{1}{1-0} = 2$

D'où $\lim U_n = 2$

Exercice 2 : (3pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ on considère les points A(-1,0, -1), B(1,2, -1) , le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(2;-2;1)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(2,-1,0)$ et de rayon **R = 5**

1) Montrer que 2x – 2y + z + 3 = 0 est une équation cartésienne du plan (P).

Soit M(x ;y ;z)$\in$ (P)

$\vec{n}(2;-2;1)$ est un vecteur normal à (P)

$(P): 2x-2y+z+d=0$ or $A(-1,0,\ -1)\in(P)$

Donc -2 - 2 × 0 - 1 + d = 0 donc d = 3

D'où $(P): 2x-2y+z+3=0$

2) Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S).

Soit M(x ;y ;z)$\in$ (S) et **R = 5**

$(S): (x-2)^2+(y+1)^2+z^2=5^2$

Donc $(S): x^2-4x+4+y^2+2y+1+z^2=25$

Donc $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y-20=0$

3) **a) Vérifier que la distance du point Ω au plan (P) est : $d(\Omega,(P))=3$**

$(P): 2x-2y+z+3=0$ et $\Omega(2,-1,0)$

$$d(\Omega,(ABC))=\frac{|2\times2-2\times(-1)+0+3|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{9}{3}=3$$

Donc $d(\Omega,(P))=3$

b) **En déduire que le plan(P) coupe la sphère suivant un cercle (Γ) de rayon à déterminer.**

On a $d(\Omega,(P))=3$ et R = 5

Donc $d(\Omega,(P))<R$

Donc le plan (P) coupe la sphère suivant un cercle (Γ) de rayon $r=\sqrt{R^2-\left(d(\Omega,(P))\right)^2}$

Donc $r=\sqrt{5^2-3^2}$ donc $r=4$

4) **a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (P).**

On a $\vec{n}(2;-2;1)$ est un vecteur normal à (P) et $(\Delta)\perp(P)$

Donc $\vec{n}(2;-2;1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) $\Omega(2,-1,0)$

Soit M(x ;y ;z)$\in$ (Δ)

$$(\Delta):\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1-2t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=0+t \end{cases}$$

b) Montrer que le point H(0 ;1 ;-1) est le centre du cercle (Γ).

$M(x;y;z)\in(\Delta)\cap(P)$ équivaut à

$$\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1-2t \\ z=t \\ 2x-2y+z+3=0 \end{cases}$$

$2(2+2t)-2(-1-2t)+t+3=0 \Leftrightarrow 9t+9=0 \Leftrightarrow t=-1$

$$\begin{cases} x=2+2(-1)=0 \\ y=-1-2(-1)=1 \\ z=-1 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad H(0;1;-1)$$

H est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (P)

Donc $H(0;1;-1)$ est le centre du cercle (Γ).

c) **Montrer que la droite (Δ) est une médiatrice du segment $[AB]$**

$\vec{n}(2;-2;1)$ est un vecteur directeur de (Δ) et $\overrightarrow{AB}(2;2;0)$

$\overrightarrow{AB}\bullet\vec{n}=2\times2+2\times(-2)+0\times1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\bullet\vec{n}=0$

Donc $(\Delta)\perp(AB)$

(Autre méthode $B(1;2;-1)\in(P)$ car 2×1 – 2×2 – 1 + 3 =0 or $A\in(P)$ donc $(AB)\subset(P)$ Puisque $(\Delta)\perp(P)$ donc $(\Delta)\perp(AB)$)

$A(-1;0;-1)$; $B(1;2;-1)$; $\frac{-1+1}{2}=0$ et $\frac{0+2}{2}=1$ et $\frac{-1-1}{2}=-1$

Donc H est le milieu de $[AB]$ or $H\in(P)$

Donc (P) passe par H milieu de $[AB]$ et perpendiculaire à (AB).

D'où la droite (Δ) est une médiatrice du segment

Exercice 3 : (2024 SN) (4pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes respectives $a=\sqrt{3}(1-i)$ $b=2+\sqrt{3}+i$

1) **Vérifier que $|a|=\sqrt{6}$ et que $\arg(a)\equiv\frac{-\pi}{4}[2\pi]$**

$|a|=\left|\sqrt{3}(1-i)\right|$ donc $|a|=\sqrt{3}|1-i|$

$|1-i|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

Donc $|a|=\sqrt{3}\sqrt{2}$ donc $|a|=\sqrt{6}$

On a $a=\sqrt{3}(1-i)$ donc $a=\sqrt{6}(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})$

Donc $a=\sqrt{6}(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})$ donc

$$a=\sqrt{6}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$$

D'où $|a|=\sqrt{6}$ et $\arg(a)\equiv\frac{-\pi}{4}[2\pi]$

2) a) **Montrer que $\frac{b}{a}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$ puis vérifier que $\frac{b}{a}=\frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$**

$$\frac{b}{a}=\frac{1+\sqrt{3}+i(3+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{3}+i(3\sqrt{3}+3)}{6}$$

$$\frac{b}{a}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}+\frac{3i(1+\sqrt{3})}{6}$$

D'où $\frac{b}{a}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$

On a $\frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{3}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

$$\frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{3}(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}+i\frac{3\sqrt{3}+3}{6}$$

$$\frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}+i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

Or $\frac{b}{a}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$

D'où $\frac{b}{a}=\frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) En déduire une forme trigonométrique du complexe b puis vérifier que b^{24} est un réel.

On a $|a|=\sqrt{6}$ et $\arg(a)\equiv\frac{-\pi}{4}[2\pi]$ donc $a=\sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

On a $\frac{b}{a}=\frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $b=\frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}a$

Donc $b=\frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}\sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Donc $b=\frac{3\sqrt{6}+\sqrt{18}}{3}e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}$

Donc $b=(\sqrt{6}+\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}$

Donc $b=(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$

On a $b^{24}=\left((\sqrt{6}+\sqrt{2})(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})\right)^{24}$

Donc $b^{24}=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^{24}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})^{24}$

Donc $b^{24}=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^{24}(\cos 24\frac{\pi}{12}+i\sin 24\frac{\pi}{12})$

Donc $b^{24}=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^{24}(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)$

Donc $b^{24}=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^{24}$ et $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^{24}\in\mathbb{R}$

D'où b^{24} est un réel.

3) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$, qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M′ d'affixe z′. On pose R(B) B′, R(A) = A′ et R(A′)=A″

a) **Vérifier que $z'=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)z$ et que $\arg(a')\equiv\frac{-\pi}{12}[2\pi]$ où a′ est l'affixe du point A′**

$$R(M)=M'\Leftrightarrow z'-0=e^{i\frac{\pi}{6}}(z-0)$$

$$\Leftrightarrow z'=(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})z\Leftrightarrow z'=(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})z$$

D'où $z'=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)z$

On a $R(A)=A'\Leftrightarrow a'=e^{i\frac{\pi}{6}}a$

$$\arg(a')\equiv\arg(e^{i\frac{\pi}{6}}a)[2\pi]\quad;\quad\arg(e^{i\frac{\pi}{6}})\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$$

$$\arg(a')\equiv\arg(e^{i\frac{\pi}{6}})+\arg(a)[2\pi]$$

$\arg(a')\equiv\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ car $\arg(a)\equiv\frac{-\pi}{4}[2\pi]$

D'où $\arg(a')\equiv\frac{-\pi}{12}[2\pi]$

b) On a $R(A')=A''\Leftrightarrow a''=e^{i\frac{\pi}{6}}a'$ or $a'=e^{i\frac{\pi}{6}}a$

Donc $|a'|=\left|e^{i\frac{\pi}{6}}a\right|=\left|e^{i\frac{\pi}{6}}\right||a|$ on a $\left|e^{i\frac{\pi}{6}}\right|=1$

Donc $|a'|=|a|=\sqrt{6}$

Or $\arg(a')\equiv\frac{-\pi}{12}[2\pi]$ donc $a'=\sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{12}}$

$$a''=e^{i\frac{\pi}{6}}a'\Leftrightarrow a''=e^{i\frac{\pi}{6}}\sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{12}}\Leftrightarrow a''=\sqrt{6}e^{i(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{12})}$$

Donc $a''=\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$ or $b=(\sqrt{6}+\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}$

$\frac{b}{a''}=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}}{\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}}$ donc $\frac{b}{a''}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\in\mathbb{R}$

Donc $\frac{b-0}{a''-0}\in\mathbb{R}$ donc O, A″ et B sont alignés.

c) **Montrer que b′, l'affixe du point B′, vérifie** $b'=\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\bar{a}$

$R(B)=B'\Leftrightarrow b'=e^{i\frac{\pi}{6}}b$ et $\frac{b}{a}=\frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$

Donc $b'=e^{i\frac{\pi}{6}}\frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}a$ car $b=\frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}a$

$$b'=\frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})}a\Leftrightarrow b'=\frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}\sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Donc $b'=\frac{3+\sqrt{3}}{3}\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Or $\mathbf{a}=\sqrt{6}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$ donc $\bar{\mathbf{a}}=\sqrt{6}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$

Or $\mathbf{b}'=\frac{3+\sqrt{3}}{3}\sqrt{6}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$

D'où $\mathbf{b}'=\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\bar{\mathbf{a}}$

d) En déduire que le triangle OAB′ est rectangle en O.

On a $(\overrightarrow{\mathbf{OA}};\overrightarrow{\mathbf{OB}'})\equiv\arg(\frac{\mathbf{b}'-0}{\mathbf{a}-0})[2\pi]$

$\arg(\frac{\mathbf{b}'}{\mathbf{a}})\equiv\arg(\mathbf{b}')-\arg(\mathbf{a})[2\pi]$

$\mathbf{b}'=\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\bar{\mathbf{a}}$ et $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)>0$

$\arg(\mathbf{b}')\equiv\arg(\bar{\mathbf{a}})[2\pi]$ et $\arg(\bar{\mathbf{a}})\equiv-\arg(\mathbf{a})[2\pi]$

Donc $\arg(\mathbf{b}')\equiv-\arg(\mathbf{a})[2\pi]$

Donc $\arg(\mathbf{b}')-\arg(\mathbf{a})\equiv-2\arg(\mathbf{a})[2\pi]$

Donc $\arg(\mathbf{b}')-\arg(\mathbf{a})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ car $\arg(\mathbf{a})\equiv\frac{-\pi}{4}[2\pi]$

Donc $\arg(\frac{\mathbf{b}'-0}{\mathbf{a}-0})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc $(\overrightarrow{\mathbf{OA}};\overrightarrow{\mathbf{OB}'})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

D'où le triangle OAB′ est rectangle en O.

Exercice 4 : (2024 SN) (2pts)

Une urne contient sept boules : quatre boules portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2 et une boule portant le numéro 3. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire simultanément au hasard deux boules de cette urne.

Sept boules : 4 (1) ; 2 (2) ; 1 (3)

$\mathbf{Card}(\Omega)=\mathbf{C}_7^2=21$

1) **Montrer que** $\mathbf{p}(\mathbf{A})=\frac{1}{3}$, où A est l'événement « les deux boules tirées portent le même numéro »

$\mathbf{Card}(\mathbf{A})=\mathbf{C}_4^2+\mathbf{C}_2^2=7$

$\mathbf{P}(\mathbf{A})=\frac{\mathbf{Card}(\mathbf{A})}{\mathbf{Card}(\Omega)}=\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$

D'où $\mathbf{P}(\mathbf{A})=\frac{1}{3}$

2) **Montrer que** $\mathbf{p}(\mathbf{B})=\frac{5}{21}$, où B est l'événement « la somme des numéros des boules tirées est 4 »

2 + 2 = 4 ; 1 + 3 = 4

$\mathbf{Card}(\mathbf{A})=\mathbf{C}_2^2+\mathbf{C}_4^1\times\mathbf{C}_1^1=5$

$\mathbf{P}(\mathbf{B})=\frac{\mathbf{Card}(\mathbf{B})}{\mathbf{Card}(\Omega)}=\frac{5}{21}$

D'où $\mathbf{P}(\mathbf{B})=\frac{5}{21}$

3) **Calculer** $\mathbf{p}(\mathrm{A}\cap\mathbf{B})$

$\mathrm{A}\cap\mathbf{B}$ « les deux boules tirées portent le même numéro et la somme des numéros des boules tirées est 4 »

2 + 2 = 4

$\mathbf{Card}(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})=\mathbf{C}_2^2=1$

$\mathbf{P}(\mathrm{A}\cap\mathbf{B})=\frac{\mathbf{Card}(\mathrm{A}\cap\mathbf{B})}{\mathbf{Card}(\Omega)}=\frac{1}{21}$

4) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier

$\mathbf{P}(\mathbf{A})\times\mathbf{P}(\mathbf{B})=\frac{5}{21}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{63}$

$\mathbf{P}(\mathrm{A}\cap\mathbf{B})=\frac{1}{21}$

$\mathbf{P}(\mathrm{A}\cap\mathbf{B})\neq\mathbf{P}(\mathbf{A})\times\mathbf{P}(\mathbf{B})$

Les événements A et B sont dépendants.

Problème:(2024 SN) (8pts)

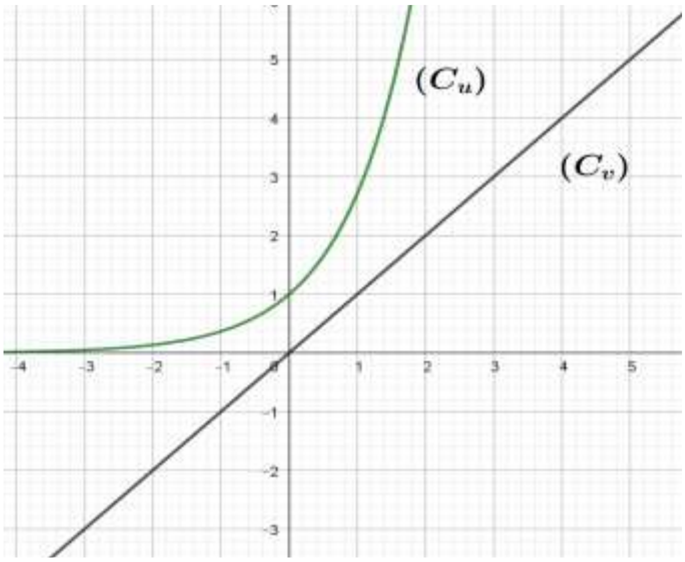
Partie I :

On considère les deux fonctions u et v définies sur R par : $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$

1) **Tracer dans un même repère orthonormé les courbes (C_u) et (C_v) des fonctions u et v.**

(C_v) est une droite passant par l'origine du repère

(C_u) est la courbe de la fonction exponentielle.



2) **Justifier graphiquement que** $\mathbf{e}^{\mathbf{x}}-\mathbf{x}>0\ \ \forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}$

(C_u) est **strictement au-dessus** de (C_v)

Donc $\mathbf{e}^{\mathbf{x}}-\mathbf{x}>0\ \ \forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}$

3) **Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_u), la courbe (C_v) et les droites d'équations x = 0 et x = 1**

$$\mathbf{A}=\int_0^1|\mathbf{u}(\mathbf{x})-\mathrm{v}(\mathrm{x})|\mathbf{dx}\,(\mathbf{u.a})$$

$$\mathbf{A}=\int_0^1|\mathbf{e}^{\mathbf{x}}-\mathbf{x}|\mathbf{dx}\,(\mathbf{u.a})$$

$$\int_0^1(\mathbf{e}^{\mathbf{x}}-\mathbf{x})\mathbf{dx}=\left[\mathbf{e}^{\mathbf{x}}-\frac{1}{2}\mathbf{x}^2\right]_0^1$$

$$\int_0^1(\mathbf{e}^{\mathbf{x}}-\mathbf{x})\mathbf{dx}=\left(\mathbf{e}-\frac{1}{2}\right)-(1-0)$$

$$\mathbf{A}=\left(\mathbf{e}-\frac{3}{2}\right)(\mathbf{u.a})$$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur R par :

$$f(x)=x+1-\ln\left(e^{x}-x\right)$$

1) a) **Vérifier que f est définie sur R.**

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R} / e^{x}-x>0\right\}$$

Or $e^{x}-x>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

$$D_f=\mathbb{R}$$

b) **Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$**

$$f(x)=x+1-\ln\left(e^{x}-x\right)$$

Donc $f(x)=x+1-\ln\left(e^{x}(1-\frac{x}{e^{x}})\right)$

Donc $f(x)=x+1-\ln e^{x}-\ln(1-x\,e^{-x})$

Donc $f(x)=x+1-x-\ln(1-x\,e^{-x})$

D'où $f(x)=1-\ln(1-x\,e^{-x})$

c) **En déduire que** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$**, puis interpréter géométriquement ce résultat.**

On a $f(x)=1-\ln(1-x\,e^{-x})$

On pose $t=-x$ si $x\to+\infty$ donc $t\to-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}-xe^{-x}=\lim_{t\to-\infty}te^{t}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}1-\ln(1-x\,e^{-x})$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=1-\ln(1)=1$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

2) a) **Calculer** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}1-\ln(1+(-x)e^{-x})$$

On pose $t=-x$ si $x\to-\infty$ donc $t\to+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{t\to+\infty}1-\ln(1+t\,e^{t})=-\infty$$

Car $\lim\limits_{t\to+\infty}1+te^{t}=+\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\ln(1+te^{t})=+\infty$

D'où $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

b) **Vérifier que pour tout $x<0$,**

$$f(x)=x+1-\ln(-x)-\ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)$$

On a $f(x)=x+1-\ln\left(e^{x}-x\right)$

$$f(x)=x+1-\ln\left(-x(1-\frac{e^{x}}{x})\right)$$

Donc $f(x)=x+1-\ln(-x)-\ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)$

c) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ puis déduire que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=x$ au voisinage de $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1-\ln(-x)-\ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}1+\frac{1}{x}-\frac{\ln(-x)}{x}-\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)$$

On pose $t=-x$ si $x\to-\infty$ donc $t\to+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{t\to+\infty}1-\frac{1}{t}+\frac{\ln t}{t}+\frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{1}{te^{t}}\right)=1$$

Car $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}te^{t}=+\infty$

$$\lim_{t\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{te^{t}}\right)=\ln 1=0$$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-x=\lim_{x\to-\infty}1-\ln(-x)-\ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)$$

$$=\lim_{t\to+\infty}1-\ln t-\ln\left(1+\frac{1}{te^{t}}\right)=-\infty$$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-x=-\infty$

(C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=x$ au voisinage de $-\infty$

3) a) Montrer que pour tout x ∈ R ; $f'(x)=\frac{1-x}{e^{x}-x}$

$$f(x)=x+1-\ln\left(e^{x}-x\right)\qquad\forall x\in\mathbb{R}$$

$$f'(x)=1-\frac{e^{x}-1}{e^{x}-x}=\frac{e^{x}-x-e^{x}+1}{e^{x}-x}$$

$$f'(x)=\frac{1-x}{e^{x}-x}\qquad\forall x\in\mathbb{R}$$

b) **Etudier le signe de la fonction dérivée de f, puis déduire le tableau de variation de f sur R.**

On a $f'(x)=\frac{1-x}{e^{x}-x}\qquad\forall x\in\mathbb{R}$

On a $e^{x}-x>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	+	0	−

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$2-\ln(e-1)$	↘ 1

c) **Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]-1;0[$.**

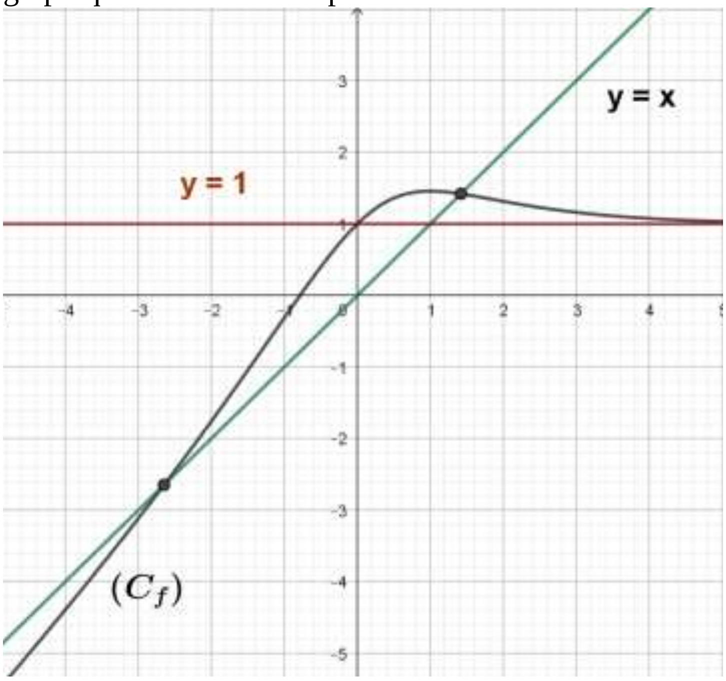
f est continue et strictement croissante sur $]-\infty;1]$ en particulier sur $[-1;0]$ $\quad f(0)=1$

$f(-1)=-\ln(1+e^{-1})<0$; $1+e^{-1}>1$ et $\ln(1+e^{-1})>0$

Donc $f(0)f(-1)<0$

D'où l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans $]-1;0[$.

4) La courbe (C_f) ci-dessous est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.



a) **Justifier graphiquement que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β.**

La courbe (C_f) coupe la droite d'équation $y = x$ en deux points donc l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β.

b) **Montrer que : $e^{\alpha}-e^{\beta}=\alpha-\beta$**

α est une solution de l'équation $f(x) = x$

Donc $f(\alpha)=\alpha \Leftrightarrow \alpha+1-\ln\left(e^{\alpha}-\alpha\right)=\alpha$

Donc $\ln\left(e^{\alpha}-\alpha\right)=1$ donc $\ln\left(e^{\alpha}-\alpha\right)=\ln(e)$

Donc $e^{\alpha}-\alpha=e$

β est une solution de l'équation $f(x) = x$

Donc $f(\beta)=\beta \Leftrightarrow \beta+1-\ln\left(e^{\beta}-\beta\right)=\beta$

Donc $\ln\left(e^{\beta}-\beta\right)=1$ donc $e^{\beta}-\beta=e$

Or $e^{\alpha}-\alpha=e$

Donc $e^{\alpha}-\alpha=e^{\beta}-\beta \Leftrightarrow e^{\alpha}-e^{\beta}=\alpha-\beta$

D'où $e^{\alpha}-e^{\beta}=\alpha-\beta$

5) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I=]-\infty;1]$

a) **Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.**

(Il n'est pas demandé de déterminer $g^{-1}(x)$)

g est continue et strictement croissante sur I donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur g(I)

Donc $g(I)=\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x);f(1)\right]=]-\infty;2-\ln(e-1)]$

Donc $g(I)=]-\infty;2-\ln(e-1)]$

D'où g admet une fonction réciproque g^{-1} Définie sur $J=]-\infty;2-\ln(e-1)]$

b) **Vérifier que g^{-1} est dérivable en 1 et calculer $\left(g^{-1}\right)'(1)$**

On a $g(0)=1 \Leftrightarrow g^{-1}(1)=0$

On a g est dérivable sur I donc g est dérivable en 0

On a $g'(0)=1$ donc $g'(0)\neq 0$

Donc g^{-1} est dérivable en $g(0)=1$

D'où g^{-1} est dérivable en 1

$$\left(g^{-1}\right)'(1)=\frac{1}{g'(g^{-1}(1))}=\frac{1}{g'(0)}=1$$

D'où $\left(g^{-1}\right)'(1)=1$