Exercice 1 : (3pts)
On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$$U_0 = 0 \text{ et } U_{n+1} = \frac{U_n - 2}{2U_n + 5} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que pour tout n de N $U_n > -1$

Pour n = 0 on a $U_0 = 0$ donc $U_0 > -1$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n > -1$ et montrons que $U_{n+1} > -1$ c'est-à-dire $U_{n+1} + 1 > 0$

$$U_{n+1} + 1 = \frac{U_n - 2}{2U_n + 5} + 1 = \frac{U_n - 2 + 2U_n + 5}{2U_n + 5}$$

$$= \frac{3U_n + 3}{2U_n + 5} = \frac{3(U_n + 1)}{2U_n + 5}$$

Donc $U_{n+1} + 1 = \frac{3(U_n + 1)}{2U_n + 5}$

On a $U_n > -1$ donc $U_n + 1 > 0$ donc $3(U_n + 1) > 0$

On a $U_n > -1$ donc $2U_n + 5 > 3$

Donc $\frac{3(U_n + 1)}{2U_n + 5} > 0$ donc $U_{n+1} + 1 > 0$

D'où $U_n > -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Montrer que (U_n) est décroissante, puis déduire que (U_n) est convergente.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n - 2}{2U_n + 5} - U_n$$

$$= \frac{U_n - 2 - 2U^2{}_n - 5U_n}{2U_n + 5} = \frac{-2U^2{}_n - 4U_n - 2}{2U_n + 5}$$

Donc $U_{n+1} - U_n = \frac{-2(U_n + 1)^2}{2U_n + 5}$

On a $U_n + 1 > 0$ et $2U_n + 5 > 3$

Donc $-2(U_n + 1)^2 < 0$ donc $\frac{-2(U_n + 1)^2}{2U_n + 5} < 0$

Donc $U_{n+1} - U_n < 0$

D'où (U_n) est décroissante.

On a (U_n) est décroissante et minorée par -1 donc elle est convergente.

3) On pose $V_n = \frac{3}{1 + U_n}$ pour tout n de N.

a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique de raison 2 puis déterminer son premier terme.

$V_{n+1} - V_n = 2$? ona $V_n = \frac{3}{1 + U_n}$

Donc $V_{n+1} = \frac{3}{1 + U_{n+1}}$ Or $U_{n+1} + 1 = \frac{3(U_n + 1)}{2U_n + 5}$

Donc $V_{n+1} - V_n = \frac{3(2U_n + 5)}{3(U_n + 1)} - \frac{3}{1 + U_n} = \frac{2(1 + U_n)}{1 + U_n}$

Donc $V_{n+1} - V_n = 2$

$V_0 = \frac{3}{1 + U_0}$ donc $V_0 = 3$

D'où (V_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $V_0 = 3$.

b) Exprimer U_n en fonction de n, pour tout n de N et déduire la limite de (U_n).

(V_n) est une suite arithmétique de raison 2 et $V_0 = 3$.

$V_n = V_0 + 2n$ donc $V_n = 2n + 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On a $V_n = \frac{3}{1 + U_n}$ donc $1 + U_n = \frac{3}{V_n}$

Donc $U_n = \frac{3 - V_n}{V_n}$ donc $U_n = \frac{3 - 2n - 3}{2n + 3}$

D'où $U_n = \frac{-2n}{2n + 3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{-2n}{2n + 3} = \lim_{n \to +\infty} \frac{-2n}{2n} = -1$$

D'où $\lim_{n \to +\infty} U_n = -1$

4) On pose $W_n = e^{3 - V_n}$ et $S_n = W_0 + W_1 + \ldots + W_n$ pour tout n de N.

a) Montrer que (W_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.

$W_n = e^{3 - V_n}$ et $V_n = 2n + 3$

$W_n = e^{3 - 2n - 3}$ **donc** $W_n = e^{-2n}$

$W_{n+1} = e^{-2(n+1)}$ **donc** $W_{n+1} = e^{-2n-2} = e^{-2}e^{-2n}$

Donc $W_{n+1} = e^{-2}W_n$

Donc (W_n) est une suite géométrique de raison $q = e^{-2}$ et de premier terme $W_0 = 1$

b) Calculer la limite de de la somme S_n .

On a (W_n) est une suite géométrique de raison $q = e^{-2}$ et de premier terme $W_0 = 1$

On a $S_n = W_0 + W_1 + \ldots + W_n$

On sait que $S_n = W_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ **et** $q = e^{-2}$ **et** $W_0 = 1$

Donc $S_n = \frac{1 - e^{-2(n+1)}}{1 - e^{-2}}$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - e^{-2(n+1)}}{1 - e^{-2}}$$

On a $\lim_{n \to +\infty} -2(n+1) = -\infty$ on pose t = -2(n+1)

Donc $\lim_{n \to +\infty} e^{-2(n+1)} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$

D'où $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{1 - e^{-2}}$

Exercice 2 : (3pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct, $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ on considère les points

A(2,1, 2), B(-2,0, 5) , C(4,-5, 7) et Ω(1,-1, 0).

On pose $\vec{u}=\overrightarrow{\Omega A}$

Soit (S) la sphère de centre Ω et de rayon **R = 3**

1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=13\vec{u}$ et en déduire que A, B, et C sont non alignés.

C(4,-5, 7) ; B(-2,0, 5) ; A(2,1, 2) ; Ω(1,-1, 0).

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-6\\5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}-1 & -6\\ 3 & 5\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-4 & 2\\ -1 & -6\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=13\vec{i}+26\vec{j}+26\vec{k}=13(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})$$

Or $\overrightarrow{\Omega A}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ et $\vec{u}=\overrightarrow{\Omega A}$ donc $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$

D'où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=13\vec{u}$ avec $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$

On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=13\vec{u}$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ car $\vec{u}\neq\vec{0}$

D'où A, B, et C sont non alignés.

b) Vérifier que x + 2y + 2z - 8 = 0 est une équation cartésienne du plan (ABC).

Soit M(x ;y ;z)∈ (ABC)

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=13\vec{u}$ est un vecteur normal à (ABC)

Donc $\vec{u}(1;2;2)$ est aussi est un vecteur normal à (ABC).

$(ABC): x+2y+2z+d=0$ or $A(2,1,\ 2)\in(ABC)$

Donc 2 + 2 × 1 + 2 ×2 + d = 0 donc d = - 8

Donc (ABC) : 6x – 6y + 3z + 9 = 0

D'où $(ABC): x+2y+2z-8=0$

c) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A.

$\vec{u}=\overrightarrow{\Omega A}$ est un vecteur normal à (ABC)

Donc $(\Omega A)\perp(ABC)$ donc A est le projeté orthogonal de Ω sur (ABC)

Donc $d(\Omega;(ABC))=\Omega A$

or $\overrightarrow{\Omega A}(1;2;2)$ donc $\Omega A=\sqrt{1+4+4}$ donc $\Omega A=3$ et R = 3

Donc A ∈ (S)

$d(\Omega;(ABC))=R$ et A ∈ (S)

D'où le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A.

Autre méthode

$(ABC): x+2y+2z-8=0$ et Ω(1,-1, 0)

$$d(\Omega,(ABC))=\frac{|1+2\times(-1)+0-8|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{9}{3}=3 \text{ et } R=3$$

Donc le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

or $\overrightarrow{\Omega A}(1;2;2)$ donc $\Omega A=\sqrt{1+4+4}$ donc $\Omega A=3$ et R = 3

Donc A ∈ (S)

D'où le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A.

2) Soient (P) le plan d'équation cartésienne 3x + 4y + z + 1 = 0 et (Δ) la droite passant par le point A et orthogonale au plan (P).

a) Montrer que la droite (Δ) coupe le plan (P) au point $H\left(\frac{1}{2};-1;\frac{3}{2}\right)$

On a $\vec{n}(3;4;1)$ est un vecteur normal à (P) et $(\Delta)\perp(P)$

Donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ)

Soit M(x ;y ;z)∈ (Δ)

$$(\Delta):\begin{cases}x=2+3t\\ y=1+4t \quad (t\in\mathbb{R})\\ z=2+t\end{cases}$$

$H(x;y;z)\in(\Delta)\cap(P)$ équivaut à

$$\begin{cases}x=2+3t\\ y=1+4t\\ z=2+t\\ 3x+4y+z+1=0\end{cases}$$

$3(2+3t)+4(1+4t)+2+t+1=0$

Donc

$$6+9t+4+16t+t+3=0\Leftrightarrow 26t=-13\Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases}x=2+3(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\\ y=1+4(-\frac{1}{2})=-1 \quad \text{d'où} \quad H(\frac{1}{2};-1;\frac{3}{2})\\ z=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\end{cases}$$

b) Déterminer les coordonnées du point D tel que H soit le milieu du segment $[AD]$

H est le milieu du segment $[AD]$

Donc $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AH}$ $\overrightarrow{AH}(\frac{1}{2}-2;-2;\frac{3}{2}-2)$

Donc $2\overrightarrow{AH}(-3;-4;-1)$ et $\overrightarrow{AD}(x_D-2;y_D-1;z_D-2)$

$$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AH}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D-2=-3\\ y_D-1=-4\\ z_D-2=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=-1\\ y_D=-3\\ z_D=1\end{cases}$$

D'où $D(-1;-3;1)$

3) Soit (Q) le plan passant par le point D et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega D}$

$\overrightarrow{\Omega D}$ est un vecteur normal à (Q) et D ∈ (Q)

Donc $(\Omega D)\perp(Q)$ donc D est le projeté orthogonal de Ω sur (Q)

Donc $d(\Omega;(Q))=\Omega D$ et $\overrightarrow{\Omega D}(-2;-2;1)$ donc $\Omega D=3$

Donc D ∈ (S) et $d(\Omega;(Q))=3$ et R = 3

D'où le plan (Q) est tangent à la sphère (S) au point D.

b) Montrer que les plans (Q) et (ABC) se coupent suivant la droite (BC).

Soit $M(x ;y ;z)\in (Q)$

$\overrightarrow{\Omega D}(-2;-2;1)$ est un vecteur normal à (Q)

$(\mathbf{Q}):-2\mathbf{x}-2\mathbf{y}+\mathbf{z}+\mathbf{d}=0$ or $\mathbf{D}(-1;-3;1)\in(\mathbf{Q})$

Donc 2 + 6 + 1 + d = 0 donc d = - 9

Donc (Q) : -2x – 2y + z - 9 = 0

D'où $(\mathbf{Q}):2\mathbf{x}+2\mathbf{y}-\mathbf{z}+9=0$

$\mathbf{B}(-2,0,\ 5)\in(\mathbf{Q})$ car 2×(-2) + 2×0 – 5 + 9 = 0

$\mathbf{C}(4,-5,\ 7)\in(\mathbf{Q})$ car 2×4+ 2×(-5) – 7 + 9 = 0

Donc $(\mathbf{BC})\subset(\mathbf{Q})$ or $(\mathbf{BC})\subset(\mathbf{ABC})$

Donc $(\mathbf{BC})\subset(\mathbf{ABC})\cap(\mathbf{Q})$

$\mathbf{A}(2,1,\ 2)\notin(\mathbf{Q})$ car 2×2+ 2×1 – 2 + 9 = 13 ≠ 0

Or $\mathbf{A}\in(\mathbf{ABC})$ donc (Q) et (ABC) ne sont pas confondus.

D'où $(\mathrm{A}\mathbf{BC})\cap(\mathbf{Q})=(\mathbf{BC})$

Exercice 3 :(3pts)

1) Soit le nombre complexe $\mathbf{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\mathbf{i}$

a) Montrer que $\mathbf{a}=\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{3}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{3})$

$\mathbf{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\mathbf{i}$ donc $|\mathbf{a}|=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{12}{4}}=\sqrt{3}$

$\mathbf{a}=\sqrt{3}(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i})$ donc $\mathbf{a}=\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{3}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{3})$

b) Déduire que $\mathbf{a}^{2022}$ est un nombre réel.

On a $\mathbf{a}=\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{3}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{3})$ donc

$\mathbf{a}^{2022}=\left[\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{3}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{3})\right]^{2022}$ donc

$\mathbf{a}^{2022}=\sqrt{3}^{2022}(\cos 2022\frac{\pi}{3}+\mathbf{i}\sin 2022\frac{\pi}{3})$

$\mathbf{a}^{2022}=\left(\sqrt{3}^{2}\right)^{1011}(\cos 674\pi+\mathbf{i}\sin 674\pi)$

On a $\cos 674\pi=1$ et $\sin 674\pi=0$

Donc $\mathbf{a}^{2022}=3^{1011}$

2) Déterminer une mesure de l'angle de la rotation R de centre O et qui transforme B en A.

$\mathbf{A}(\mathbf{a})$ et $\mathrm{B}(\overline{\mathbf{a}})$

$\mathbf{R}(\mathbf{B})=\mathrm{A}\Leftrightarrow \mathrm{a}-0=e^{i\theta}(\overline{\mathbf{a}}-0)$ où θ est l'angle de la rotation.

Donc $\mathrm{a}=e^{i\theta}\overline{\mathbf{a}}\Leftrightarrow e^{i\theta}=\frac{\mathbf{a}}{\overline{\mathbf{a}}}$ or $\mathbf{a}=\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{3}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{3})$

Donc $\mathrm{a}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $\overline{\mathrm{a}}=\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

donc $\frac{\mathbf{a}}{\overline{\mathbf{a}}}=\frac{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}}$ donc $e^{i\theta}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ donc $\theta\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

Une mesure de l'angle de la rotation R est $\frac{2\pi}{3}$.

3) $(E_\alpha):z^2-\sqrt{3}\mathbf{z}+\alpha=0$

a) Justifier que $\alpha>\frac{3}{4}$ et que $\alpha=\mathbf{z}\overline{\mathbf{z}}$

On a l'équation (E_α) admet deux racines complexes conjuguées non réelles z et $\overline{\mathbf{z}}$

Donc $\Delta<0$ et $\Delta=(-\sqrt{3})^2-4\alpha$

Donc $3-4\alpha<0$ donc $\alpha>\frac{3}{4}$

On a z et $\overline{\mathbf{z}}$ sont les solutions de l'équation (E_α)

$\mathbf{z}\overline{\mathbf{z}}=\frac{\alpha}{1}$ et $\mathbf{z}+\overline{\mathbf{z}}=-\frac{-\sqrt{3}}{1}$ donc $\mathbf{z}\overline{\mathbf{z}}=\alpha$ et $\mathbf{z}+\overline{\mathbf{z}}=\sqrt{3}$

Donc $\alpha=\mathbf{z}\overline{\mathbf{z}}$

b) Montrer que $|\mathbf{z}|=|\mathbf{z}-\sqrt{3}|$

On a $\mathbf{z}+\overline{\mathbf{z}}=\sqrt{3}$ donc $\overline{\mathbf{z}}=\sqrt{3}-\mathbf{z}$

Donc $|\overline{\mathbf{z}}|=|\sqrt{3}-\mathbf{z}|$ or $|\overline{\mathbf{z}}|=|\mathbf{z}|$ et $|\sqrt{3}-\mathbf{z}|=|\mathbf{z}-\sqrt{3}|$

D'où $|\mathbf{z}|=|\mathbf{z}-\sqrt{3}|$

c) En déduire que les points M et N appartiennent à la médiatrice (Δ) du segment $[\mathbf{OP}]$

On a $|\mathbf{z}|=|\mathbf{z}-\sqrt{3}|\Leftrightarrow|\mathbf{z}-0|=|\mathbf{z}-\sqrt{3}|$; $\mathbf{M}(\mathbf{z})$ et $\mathbf{P}(\sqrt{3})$

Donc $\mathbf{MO}=\mathbf{MP}$ donc $\mathbf{M}\in(\Delta)$ la médiatrice de $[\mathbf{OP}]$

$|\mathbf{z}|=|\mathbf{z}-\sqrt{3}|$ et $|\overline{\mathbf{z}}|=|\mathbf{z}|$ et $|\mathbf{z}-\sqrt{3}|=|\overline{\mathbf{z}-\sqrt{3}}|=|\overline{\mathbf{z}}-\sqrt{3}|$

Donc $|\overline{\mathbf{z}}|=|\overline{\mathbf{z}}-\sqrt{3}|\Leftrightarrow|\overline{\mathbf{z}}-0|=|\overline{\mathbf{z}}-\sqrt{3}|$; $\mathbf{N}(\overline{\mathbf{z}})$ et $\mathbf{P}(\sqrt{3})$

Donc $\mathbf{NO}=\mathbf{NP}$ donc $\mathbf{N}\in(\Delta)$ la médiatrice de $[\mathbf{OP}]$

d) Déterminer la valeur de α pour laquelle $|\mathbf{z}-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$ et déduire dans ce cas les points d'intersection de la droite (Δ) et le cercle de centre P et de rayon $\sqrt{3}$

On a $|\mathbf{z}-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$ et $|\mathbf{z}|=|\mathbf{z}-\sqrt{3}|$ donc $|\mathbf{z}|=\sqrt{3}$

$|\mathbf{z}|^2=3$ or $|\mathbf{z}|^2=\mathbf{z}\overline{\mathbf{z}}$ et $\alpha=\mathbf{z}\overline{\mathbf{z}}$ d'où $\alpha=3$

On a $|\mathbf{z}-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$ et $\mathbf{M}(\mathbf{z})$ et $\mathbf{P}(\sqrt{3})$

$\mathbf{MP}=\sqrt{3}$ donc $\mathbf{M}$ appartient au cercle (C) de centre P et de rayon $\sqrt{3}$

Et on a $|\mathbf{z}-\sqrt{3}|=|\overline{\mathbf{z}}-\sqrt{3}|$ donc $|\overline{\mathbf{z}}-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$

$\mathbf{NP}=\sqrt{3}$ donc $\mathbf{N}$ appartient au cercle (C) de centre P et de rayon $\sqrt{3}$.

Or $\mathbf{M}\in(\Delta)$ et $\mathbf{N}\in(\Delta)$

D'où les points d'intersection de la droite (Δ) et le cercle (C) de centre P et de rayon $\sqrt{3}$ sont M et N.

Exercice 4:(3pts)

1) On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

4 B ; 2 N

$\mathbf{Card}(\Omega)=C_6^2=15$

a) Calculer la probabilité de l'événement :

A ″ tirer au moins une boule noire ″

(1N et 1B) ou 2N

$\mathbf{Card}(\mathbf{A})=C_2^1\times C_4^1+C_2^2=8+1=9$

$\mathbf{P}(\mathbf{A})=\dfrac{\mathbf{Card}(\mathbf{A})}{\mathbf{Card}(\Omega)}=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$

b) Soit l'événement B : ″Obtenir deux boules de même couleur ″ montrer que $\mathbf{P}(\mathbf{B})=\dfrac{7}{15}$

2B ou 2N

$\mathbf{Card}(\mathbf{B})=C_4^2+C_2^2=6+1=7$

$\mathbf{P}(\mathbf{A})=\dfrac{\mathbf{Card}(\mathbf{A})}{\mathbf{Card}(\Omega)}=\dfrac{7}{15}$

c) La probabilité pour que l'événement B soit réalisé exactement trois fois est : $C_5^3(\mathbf{P}(\mathbf{B}))^3(1-\mathbf{P}(\mathbf{B}))^2$

$C_5^3(\mathbf{P}(\mathbf{B}))^3(1-\mathbf{P}(\mathbf{B}))^2=10\left(\dfrac{7}{15}\right)^3\left(\dfrac{8}{15}\right)^2$

2) a) justifier que les valeurs prises par X sont 1 ; 2 et 3

X = 1 la première boule tirée est blanche et on arrête le tirage.

X = 2 la première boule tirée est noire, la deuxième est blanche et on arrête le tirage.

X = 3 la première boule et la deuxième sont noires et la troisième est blanche et on arrête le tirage.

b) Montrer que $\mathbf{P}(\mathbf{X}=2)=\dfrac{4}{15}$

$(\mathbf{X}=2)$:″ la première boule tirée est noire et la deuxième est blanche ″ $\mathbf{P}(\mathbf{X}=2)=\dfrac{2}{6}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{4}{15}$

c) les valeurs prises par X sont 1 ; 2 et 3

$(\mathbf{X}=1)$:″ la boule tirée est blanche ″

$\mathbf{P}(\mathbf{X}=1)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

$(\mathbf{X}=3)$″ la première boule et la deuxième sont noires et la troisième est blanche ″

$\mathbf{P}(\mathbf{X}=3)=\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{4}=\dfrac{1}{15}$

k	1	2	3
P(X=k)	$\mathbf{\frac{2}{3}}$	$\mathbf{\frac{4}{15}}$	$\mathbf{\frac{1}{15}}$

(On a $\mathbf{\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{15}+\dfrac{1}{15}=1}$)

d) La probabilité d'obtenir au moins une boule noire est : $\mathbf{P}(\mathbf{X}=2)+\mathbf{P}(\mathbf{X}=3)=\dfrac{4}{15}+\dfrac{1}{15}=\dfrac{1}{3}$

Problème : (8pts)

On considère la fonction f définie sur R par :

$$\begin{cases} f(x)=(x-1)^2e^{x(2-x)} & x\le 2\\ f(x)=1+(x-2)^2\ln(x-2) & x>2\end{cases}$$

1) Montrer que f est continue au point 2.

On a $f(2)=(2-1)^2e^{2(2-2)}$ donc $f(2)=1$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} 1+(x-2)^2\ln(x-2)$

On pose t = x – 2 si $x\to 2^+$ alors $t\to 0^+$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{t\to 0^+} 1+t^2\ln(t)=\lim\limits_{t\to 0^+} 1+t\times t\ln(t)$

Donc $\lim\limits_{t\to 0^+} 1+t\times t\ln(t)=1$ car $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln(t)=0$

Donc $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$ car $f(2)=1$

Donc f est continue à droite en 2

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x-1)^2e^{x(2-x)}=1$

Donc $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$ donc f est continue à gauche en 2. Puisque f est continue à droite en 2.

D'où f est continue en 2.

2) a) Vérifier que pour tout x < 2 et x ≠ 0

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=xe^{x(2-x)}-x\frac{e^{x(2-x)}-1}{x(2-x)}$$

Pour tout x < 2 et x ≠ 0

$$xe^{x(2-x)}-x\frac{e^{x(2-x)}-1}{x(2-x)}=\frac{x(2-x)e^{x(2-x)}-e^{x(2-x)}+1}{(2-x)}$$

$$=\frac{e^{x(2-x)}(2x-x^2-1)+1}{-(x-2)}=-\frac{-e^{x(2-x)}(x-1)^2+1}{(x-2)}$$

$$xe^{x(2-x)}-x\frac{e^{x(2-x)}-1}{x(2-x)}=\frac{(x-1)^2e^{x(2-x)}-1}{(x-2)}=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

D'où $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=xe^{x(2-x)}-x\dfrac{e^{x(2-x)}-1}{x(2-x)}$

c) Montrer que f est dérivable en 2 et que $f'(2)=0$ puis interpréter les résultats géométriquement.

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-} xe^{x(2-x)}-x\dfrac{e^{x(2-x)}-1}{x(2-x)}=0$

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=2e^0-2\times 1=0$; $t=x(2-x)$

Car $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{e^{x(2-x)}-1}{x(2-x)}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{e^t-1}{t}=1$

Donc $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=0$

Donc f est dérivable à gauche en 2 et $f_g'(2)=0$

c) Montrer que f est dérivable en 2 et que $f'(2)=0$ puis interpréter les résultats géométriquement

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{1+(x-2)^2\ln(x-2)-1}{x-2}$$

Donc $\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}(x-2)\ln(x-2)$

On pose t = x – 2 si $x\to 2^+$ alors $t\to 0^+$

$$\lim_{x\to 2^+}(x-2)\ln(x-2)=\lim_{t\to 0^+}t\ln t=0$$

Donc $\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=0$

Donc f est dérivable à droite en 2 et $f'_d(2)=0$

Puisque f est dérivable à droite et à gauche en 2 et $f'_g(2)=f'_d(2)=0$

D'où f est dérivable en 2 et que $f'(2)=0$

On a f est dérivable en 2 et $f'(2)=0$

Donc la courbe **(C)** admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2.

3) a) Vérifier que pour tout x ≤ 2

$$f(x)=x(x-2)e^{x(2-x)}+e^{x(2-x)}$$

Pour tout x ≤ 2 $f(x)=(x-1)^2e^{x(2-x)}$

Donc $f(x)=(x^2-2x+1)e^{x(2-x)}$

Donc $f(x)=(x^2-2x)e^{x(2-x)}+e^{x(2-x)}$

Donc $f(x)=x(x-2)e^{x(2-x)}+e^{x(2-x)}$

b) Calculer $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ et interpréter géométriquement Le résultat.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x(x-2)e^{x(2-x)}+e^{x(2-x)}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}-x(2-x)e^{x(2-x)}+e^{x(2-x)}$$

On pose t = x(2 - x) si $x\to-\infty$ alors $t\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{t\to-\infty}-te^t+e^t=0$$

Car $\lim_{t\to-\infty}te^t=0$ et $\lim_{t\to-\infty}e^t=0$

D'où $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$

On a $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ (C) admet une asymptote horizontale d'équation y = 0 au voisinage de $-\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}1+(x-2)^2\ln(x-2)=+\infty$

Car $\lim_{x\to+\infty}\ln(x-2)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}(x-2)^2=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+(x-2)^2\ln(x-2)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\frac{x^2(1-\frac{2}{x})^2\ln(x-2)}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+x(1-\frac{2}{x})^2\ln(x-2)=+\infty$$

Car $\lim_{x\to+\infty}x(1-\frac{2}{x})^2=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\ln(x-2)=+\infty$

D'où $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

On a $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ Donc la courbe **(C)** admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

4) a) Montrer que pour tout x < 2

$$f'(x)=2x(x-1)(2-x)e^{x(2-x)}$$

Pour tout x < 2 $f(x)=(x-1)^2e^{x(2-x)}$

$$f'(x)=2(x-1)e^{x(2-x)}+(x-1)^2e^{x(2-x)}(x(2-x))'$$

$$f'(x)=2(x-1)e^{x(2-x)}+(x-1)^2e^{x(2-x)}(2-2x)$$

Donc $f'(x)=2(x-1)e^{x(2-x)}\left[1+(x-1)(1-x)\right]$

Donc $f'(x)=2(x-1)e^{x(2-x)}x(2-x))$

D'où $f'(x)=2x(x-1)(2-x)e^{x(2-x)}\quad\forall x<2$

b) Montrer que pour tout x > 2

$$f'(x)=(x-2)(1+\ln(x-2))$$

Pour tout x > 2 $f(x)=1+(x-2)^2\ln(x-2)$

$$f'(x)=2(x-2)\ln(x-2)+(x-2)^2\times\frac{1}{x-2}$$

Donc $f'(x)=(x-2)\left[2\ln(x-2)+1\right]$

D'où $f'(x)=(x-2)(1+\ln(x-2))\quad\forall x>2$

c) Résoudre dans l'intervalle $]2;+\infty[$ l'inéquation :

$$\forall x\in]2;+\infty[\quad 1+2\ln(x-2)\le 0$$

$$1+2\ln(x-2)\le 0\Leftrightarrow\ln(x-2)\le-\frac{1}{2}$$

$$\ln(x-2)\le-\frac{1}{2}\Leftrightarrow e^{\ln(x-2)}\le e^{-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x-2\le e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow x\le 2+e^{-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x\le 2+\frac{1}{\sqrt{e}}$$

On a $x>2$ et $x\le 2+\frac{1}{\sqrt{e}}$ donc $2<x\le 2+\frac{1}{\sqrt{e}}$

D'où $S=\left]2;2+\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$

d) Etudier le signe de $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ sur R puis dresser le tableau de variations de f sur R.

$\forall \mathbf{x}>2 \quad \mathbf{f}'(\mathbf{x})=(\mathbf{x}-2)(1+2\ln(\mathbf{x}-2))$

Le signe $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ est celui de $1+2\ln(\mathbf{x}-2)$

$\forall \mathbf{x}>2$ on a $\mathbf{x}-2>0$

On a $1+2\ln(\mathbf{x}-2)\le 0 \Leftrightarrow 2<\mathbf{x}\le 2+\frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}}}$

$\forall \mathbf{x}\in \left]2;2+\frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}}}\right] \quad \mathbf{f}'(\mathbf{x})\le 0$

On a $1+2\ln(\mathbf{x}-2)\ge 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}\ge 2+\frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}}}$

$\forall \mathbf{x}\in \left[2+\frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}}};+\infty\right[\quad \mathbf{f}'(\mathbf{x})\ge 0$

$\forall \mathbf{x}<2 \quad \mathbf{f}'(\mathbf{x})=2\mathbf{x}(\mathbf{x}-1)(2-\mathrm{x})\mathbf{e}^{\mathbf{x}(2-\mathbf{x})}$

$\forall \mathbf{x}<2 \quad 2-\mathbf{x}>0$ et $\mathbf{e}^{\mathbf{x}(2-\mathbf{x})}>0$

Le signe $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ est celui de $\mathbf{x}(\mathbf{x}-1)$

$\mathbf{x}(\mathbf{x}-1)=0 \Leftrightarrow \mathrm{x}=0$ ou $\mathrm{x}=1$

$\mathbf{x}(\mathbf{x}-1)\le 0 \Leftrightarrow 0\le \mathrm{x}\le 1$

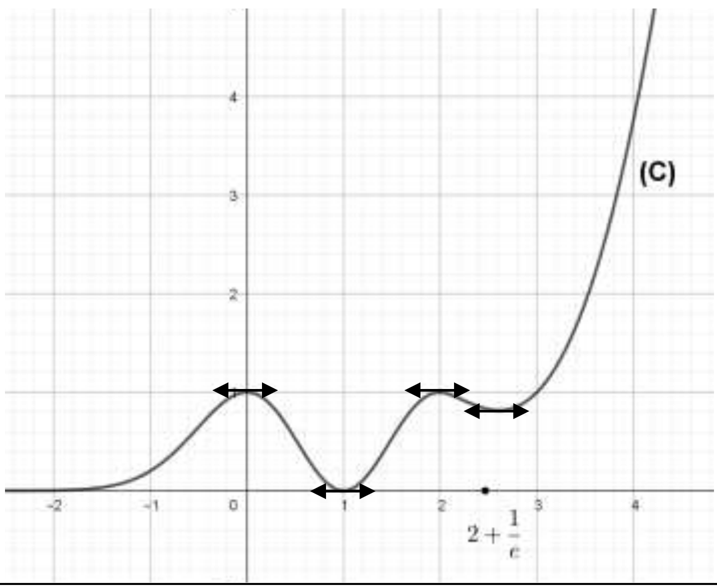
$\forall \mathbf{x}\in[0;1] \quad \mathbf{f}'(\mathbf{x})\le 0$

$\mathbf{x}(\mathbf{x}-1)>0 \Leftrightarrow \mathbf{x}\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]1;2\right[$

$\forall \mathbf{x}\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]1;2\right[\quad \mathbf{f}'(\mathbf{x})>0$ et on a $\mathbf{f}'(2)=0$

x	$-\infty$		0		1		2		$2+\frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}}}$		$+\infty$
f′(x)		+	**0**	−	**0**	+	**0**	−	**0**	+	
f(x)	0	↗	1	↘	0	↗	1	↘	0,8	↗	$+\infty$

5) $\mathbf{f}\left(2+\frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}}}\right)\approx 0{,}8$



6) Soit $\lambda \in \left]2;3\right[$

a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_{\lambda}^{3}(\mathbf{x}-2)^2\ln(\mathbf{x}-2)\mathbf{dx}=-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\left(\frac{1}{3}-\ln(\lambda-2)\right)$$

on pose $\mathbf{J}=\int_{\lambda}^{3}(\mathbf{x}-2)^2\ln(\mathbf{x}-2)\mathbf{dx}$

$\mathbf{u}(\mathbf{x})=\ln(\mathbf{x}-2) \qquad \mathbf{u}'(\mathbf{x})=\frac{1}{\mathbf{x}-2}$

$\mathbf{v}'(\mathbf{x})=(\mathbf{x}-2)^2 \qquad \mathbf{v}(\mathbf{x})=\frac{(\mathbf{x}-2)^3}{3}$; (x-2)′=1

$$\mathbf{J}=\left[\frac{(\mathbf{x}-2)^3}{3}\ln(\mathbf{x}-2)\right]_{\lambda}^{3}-\int_{\lambda}^{3}\frac{(\mathbf{x}-2)^3}{3}\frac{1}{\mathbf{x}-2}\mathbf{dx}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{J}=-\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\ln(\lambda-2)-\frac{1}{3}\int_{\lambda}^{3}(\mathbf{x}-2)^2\mathbf{dx}$$

Donc $\mathbf{J}=-\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\ln(\lambda-2)-\frac{1}{3}\left[\frac{(\mathbf{x}-2)^3}{3}\right]_{\lambda}^{3}$

Donc $\mathbf{J}=-\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\ln(\lambda-2)-\frac{1}{9}(1-(\lambda-2)^3)$

D’où $\mathbf{J}=-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}(\lambda-2)^3(\frac{1}{3}-\ln(\lambda-2)$

b) Déduire en fonction de λ l’aire A(λ) de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d’équations : y = 1, x = λ et x = 3

$\forall \mathbf{x}\in\left]2;3\right]$ (C) est en dessous de la droite d’équations : y = 1

$$\mathbf{A}(\lambda)=\int_{\lambda}^{3}\left|\mathbf{f}(\mathbf{x})-1\right|\mathbf{dx}1\mathbf{cm}\times 1\mathbf{cm}$$

$\forall \mathbf{x}\in\left]2;3\right]$ (C) est en dessous de la droite d’équations : y = 1

$$\int_{\lambda}^{3}\left|\mathbf{f}(\mathbf{x})-1\right|\mathbf{dx}=\int_{\lambda}^{3}1-\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}$$

$$\int_{\lambda}^{3}1-\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}=\int_{\lambda}^{3}1-1-(\mathbf{x}-2)^2\ln(\mathbf{x}-2)\mathbf{dx}$$

Donc $\int_{\lambda}^{3}1-\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}=-\int_{\lambda}^{3}(\mathbf{x}-2)^2\ln(\mathbf{x}-2)\mathbf{dx}$

Or $\int_{\lambda}^{3}(\mathbf{x}-2)^2\ln(\mathbf{x}-2)\mathbf{dx}=-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\left(\frac{1}{3}-\ln(\lambda-2)\right)$

$$\mathbf{A}(\lambda)=\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3}(\lambda-2)^3(\frac{1}{3}-\ln(\lambda-2))\right)\mathbf{cm}^2$$

c) Calculer $\lim_{\lambda\to 2^+}\mathbf{A}(\lambda)$

$$\lim_{\lambda\to 2^+}\frac{1}{9}-\frac{1}{3}(\lambda-2)^3(\frac{1}{3}-\ln(\lambda-2))$$

$$=\lim_{\lambda\to 2^+}\frac{1}{9}-\frac{1}{3}(\lambda-2)^2\left[\frac{1}{3}(\lambda-2)-(\lambda-2)\ln(\lambda-2)\right]$$

On pose t = λ – 2 si $\lambda \to 2^+$ alors $\mathbf{t} \to 0^+$ Donc $\lim\limits_{\lambda \to 2^+} (\lambda - 2)\ln(\lambda - 2) = \lim\limits_{\mathbf{t} \to 0^+} \mathbf{t}\ln(\mathbf{t}) = 0$

$$\lim_{\lambda \to 2^+} \frac{1}{3}(\lambda - 2)^2 \left[\frac{1}{3}(\lambda - 2) - (\lambda - 2)\ln(\lambda - 2)\right] = 0$$

D'où $\lim\limits_{\lambda \to 2^+} \mathbf{A}(\lambda) = \frac{1}{9}\mathbf{cm}^2$