Exercice 1 : (2014 SN) (3pts)

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ les points A(0;3;1), B(-1;3;0) et C(0;5;0) et (S) la sphère d'équation: $x^2+y^2+z^2-4x-5=0$

1) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ et en déduire que A, B et C sont non alignés.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0&2\\-1&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1&0\\-1&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1&0\\0&2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$$

D'où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$

b) Montrer que : $2x-y-2z+5=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

Soit M(x ;y ;z)$\in$ (ABC)

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ABC)

$$(ABC): 2x-y-2z+d=0$$

Or $A(0;3;1)\in(ABC)$

Donc $2\times0-3-2\times1+d=0\Leftrightarrow d=5$

D'où $(ABC): 2x-y-2z+5=0$

2) a) Montrer que (S) est de centre $\Omega(2 ; 0 ; 0)$ et de rayon 3

$$(S): x^2+y^2+z^2-4x-5=0$$

$a=\frac{-4}{-2}$; $b=\frac{0}{-2}$; $c=\frac{0}{-2}$; $d=-5$

Donc $a=2$; $b=0$; $c=0$; $d=-5$

$a^2+b^2+c^2-d=2^2+0^2+0^2+5=9>0$

Donc le centre de (S) est $\Omega(2;0;0)$ et $R=\sqrt{9}=3$

D'où $\Omega(2;0;0)$ et rayon $R=3$

b) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

$(ABC): 2x-y-2z+5=0$ $\quad\Omega(2;0;0)$

$$d(\Omega,(ABC))=\frac{|2\times2+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{9}{\sqrt{9}}=3$$

On a $d(\Omega,(ABC))=3$ et $R=3$

D'où le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).

c) Déterminer le triplet de coordonnées du point de tangence H du plan (ABC) et de la sphère (S).

H est la projection orthogonale de Ω sur le plan (ABC)

Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2;-1;-2)$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc c'est un vecteur directeur de (Δ)

Soit M(x ;y ;z)$\in$ (Δ) $\quad\Omega(2;0;0)$

$$(\Delta):\begin{cases}x=2+2t\\y=-t\\z=-2t\end{cases}$$ ($t\in\mathbb{R}$) est une représentation paramétrique de la droite (Δ).

$M(x;y;z)\in(\Delta)\cap(ABC)$ équivaut à

$$\begin{cases}x=2+2t\\y=-t\\z=-2t\\2x-y-2z+5=0\end{cases}$$

$2(2+2t)-(-t)-2(-2t)+5=0$

Donc $9t+9=0\Leftrightarrow 9t=-9\Leftrightarrow t=-1$

$$\begin{cases}x=2-2=0\\y=1\\z=2\end{cases}$$ donc $(\Delta)\cap(ABC)=\{H(0;1;2)\}$

D'où $H(0;1;2)$ est le point de contact de (S) et (ABC).

Exercice 2 :(2014 SN) (3pts)

1) Résoudre dans C l'équation : $z^2-z\sqrt{2}+2=0$

$\Delta=\sqrt{2}^2-4\times1\times2=-6$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$ et $z_2=\overline{z_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2}$

D'où $S=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$

2) Soit le nombre complexe u tel que :

$$u=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

a) Ecrire u sous forme trigonométrique.

$$u=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$|u|=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}\left|1+i\sqrt{3}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3+1}=\sqrt{2}$$

$$u=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$u=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

b) En déduire que u^6 est un réel.

$$u^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6 (\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3})^6$$

$$u^6 = 8(\cos\frac{6\pi}{3} + \sin\frac{6\pi}{3})$$

$$u^6 = 8(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 8(1 + i\times 0)$$

D'où $u^6 = 8$

3) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes respectives $a = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $b = 8$

Soit z l'affixe du point M du plan et z′ l'affixe du point M′ image du point M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Ecrire z′ en fonction de z

Soit z l'affixe du point M du plan et z′ l'affixe du point M′ image du point M par la rotation R.

$$R(M) = M' \Leftrightarrow z' - z_O = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_O)$$

$$\Leftrightarrow z' = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z$$

D'où $z' = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z$

b) Vérifier que le point B est l'image du point A par la rotation R.

$R(A) = B \Leftrightarrow b = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})a$?

$$(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})a = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(4 - 4i\sqrt{3})$$
$$= 2 - 2i\sqrt{3} + 2i\sqrt{3} + 6 = 8 = b$$

D'où $R(A) = B$

c) En déduire que le triangle OAB est équilatéral

$R(A) = B$ donc $OA = OB$ et $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

D'où le triangle OAB est équilatéral.

<u>Exercice 3 :</u> :(2014 SN) (3pts)

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 7 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 13$$

1) Montrer que : $U_n < 14 \quad \forall n \in N$

Pour n = 0 on a $U_0 = 13$ donc $U_0 < 14$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n < 14$ et montrons que $U_{n+1} < 14$

On a $U_n < 14$ donc

$$\frac{1}{2}U_n < \frac{1}{2}14 \Leftrightarrow \frac{1}{2}U_n + 7 < 7 + 7 \Leftrightarrow U_{n+1} < 14$$

D'où $U_n < 14 \quad \forall n \in N$

2) Soit (V_n) la suite définie par :

$$V_n = 14 - U_n \qquad \forall n \in N$$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et donner V_n en fonction de n.

Montrons que $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$? $\forall n \in \mathbb{N}$

$$V_{n+1} = 14 - U_{n+1} = 14 - \frac{1}{2}U_n - 7 = 7 - \frac{1}{2}U_n$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2}(14 - U_n) = \frac{1}{2}V_n$$

D'où $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

De premier terme $V_0 = 14 - U_0 = 14 - 13 = 1$

Donc $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n V_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

D'où $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) En déduire que : $U_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \in N$

puis Calculer $\lim U_n$

On a $V_n = 14 - U_n$ donc $U_n = 14 - V_n$ et $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

D'où $U_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \in N$

$\lim U_n = \lim(14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n) = 14$ car $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$-1 < \frac{1}{2} < 1$

D'où $\lim U_n = 14$

c) Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle

$$U_n > 13,99 \Leftrightarrow 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 13,99$$

$$\Leftrightarrow 14 - 13,99 > \left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-2}$$

la fonction log est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-2} \Leftrightarrow \log\left(\frac{1}{2}\right)^n < \log 10^{-2}$$

$$\Leftrightarrow n\log\frac{1}{2} < -2\log 10$$

$$\Leftrightarrow -n\log 2 < -2 \Leftrightarrow n > \frac{2}{\log 2}$$

Donc $U_n > 13,99 \Leftrightarrow n > \frac{2}{\log 2}$

$\frac{2}{\log 2} \approx 6,643$ d'où $n = 7$

Exercice 4 : (2014 SN) (3pts)

1) On tire simultanément et au hasard **deux jetons** du sac

Soit l'événement : A ″ la somme des deux numéros portés par les deux jetons tirées est égal à 1 ″

Montrer que $P(A)=\frac{5}{9}$

5 (0) ; 4 (1)

$\text{Card}(\Omega)=C_9^2=36$

0 + 1 = 1

$\text{Card}(A)=C_5^1\times C_4^1=20$

$$P(A)=\frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$$

2) a) Montrer que la probabilité de gain de Said est $\frac{1}{6}$

Soit B ″Obtenir deux jetons portant chacun le chiffre 1″

$\text{Card}(B)=C_4^2=6$

$$P(B)=\frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

b) **Quelle est la probabilité** pour que Said gagne exactement deux fois.

La probabilité de gain de Said exactement deux fois est : $C_3^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-2}=3\times\frac{1}{36}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{72}$

D'où la probabilité demandée est : $\frac{5}{72}$

Problème : (2014 SN) (8pts)

I) On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par

$$g(x)=1-\frac{1}{x^2}+\ln x$$

1) Montrer que $g'(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}\quad \forall x\in]0;+\infty[$

et en déduire que g est croissante sur $]0;+\infty[$

$g(x)=1-\frac{1}{x^2}+\ln x\quad \forall x\in]0;+\infty[$

$g'(x)=-\frac{-2x}{x^4}+\frac{1}{x}=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}\quad \forall x\in]0;+\infty[$

D'où $g'(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}\quad \forall x\in]0;+\infty[$

On a $g'(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}>0\quad \forall x>0$

D'où g est croissante sur $]0;+\infty[$

2) Vérifier que g(1) = 0 puis en déduire que :

$g(x)\le 0\ \forall\in]0,1]$ et $g(x)\ge 0\ \forall\in[1;+\infty[$

$g(1)=1-\frac{1}{1^2}+\ln 1=1-1+0=0$

Donc $g(1)=0$

$\forall\in]0,1]$ donc $0<x\le 1$

g est croissante sur $]0;+\infty[$ et $x\le 1$ **donc**

$g(x)\le g(1)\Leftrightarrow g(x)\le 0$

D'où $\forall\in]0,1]\quad g(x)\le 0$

$\forall\in[1;+\infty[\quad x\ge 1$ et g est croissante sur $]0;+\infty[$

donc $g(x)\ge g(1)\Leftrightarrow g(x)\ge 0$

D'où $\forall\in[1;+\infty[\quad g(x)\ge 0$

II) On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$

par : $f(x)=(1+\ln x)^2+\frac{1}{x^2}$

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\ln x)^2+\frac{1}{x^2}=+\infty$

Car $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\ln x)^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty$

D'où $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ donc la droite d'équation x = 0 est une asymptote verticale à la courbe (C).

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\ln x)^2+\frac{1}{x^2}=+\infty$

Car et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\ln x)^2=+\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)^2}{x}=0$ (on put poser $t=\sqrt{x}$ puis montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

0n a $t=\sqrt{x}\Leftrightarrow x=t^2$ Si $x\to+\infty$ donc $t\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)^2}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{(1+\ln t^2)^2}{t^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)^2}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{1+2\ln t}{t}\right)^2$

$=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}+2\frac{\ln t}{t}\right)^2=0$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)^2}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$?

$$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left((1+\ln x)^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(1+\ln x)^2}{x} + \frac{1}{x^3} = 0$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(1+\ln x)^2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

c) Déterminer la branche infinie de **(C)** au voisinage de $+\infty$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

3) a) Montrer que: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x} \quad \forall \in]0;+\infty[$

puis en déduire que est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$

$$f(x) = (1+\ln x)^2 + \frac{1}{x^2} \quad \forall \in]0;+\infty[$$

$$f'(x) = 2(1+\ln x)(1+\ln x)' - \frac{2x}{x^4}$$

$$f'(x) = 2(1+\ln x)\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}\left(1+\ln x - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x}g(x)$$

D'où $f'(x) = \frac{2g(x)}{x} \qquad \forall \in]0;+\infty[$

$g(x) \le 0 \quad \forall \in]0,1]$ et $g(x) \ge 0 \quad \forall x \in [1;+\infty[$

$f'(x) \le 0 \quad \forall \in]0,1]$ donc f est décroissante sur $]0,1]$ et $f'(x) \ge 0 \quad \forall x \in [1;+\infty[$ donc f est croissante sur $[1;+\infty[$

b) Dresser le tableau des variations de f sur $]0;+\infty[$, puis en déduire que $f(x) \ge 2 \quad \forall x \in]0;+\infty[$

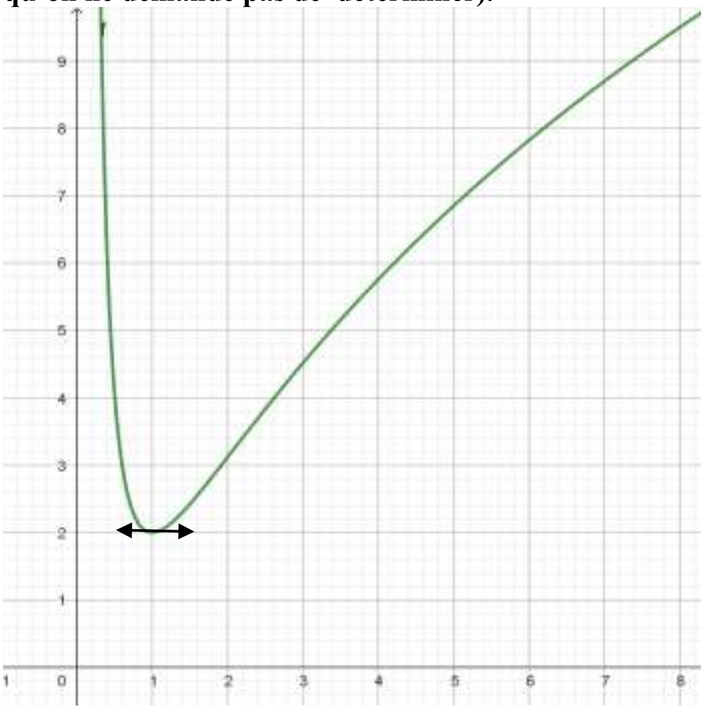
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

f(1) est le minimum de f sur $]0;+\infty[$

Donc $f(x) \ge f(1) \quad \forall x \in]0;+\infty[$ **or f(1) = 2**

D'où $f(x) \ge 2 \quad \forall x \in]0;+\infty[$

4) Construire la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
(On admet que la courbe (C) admet un point d'inflexion, qu'on ne demande pas de déterminer).



5) On considère les intégrales I et J suivants:

$$I = \int_1^e (1+\ln x)dx \text{ et } J = \int_1^e (1+\ln x)^2 dx$$

a) Montrer que $H : x \to x\ln x$ est une fonction primitive de $h : x \to 1+\ln x$ sur $]0;+\infty[$ puis en déduire que $I = e$.

$$H'(x) = (x\ln x)' = \ln x + x\frac{1}{x} = 1+\ln x = h(x)$$

$$H'(x) = h(x) \qquad \forall x \in]0;+\infty[$$

D'où H est une primitive de h sur $]0;+\infty[$

$$\int_1^e (1+\ln x) = [x\ln x]_1^e = e\ln e - 1\ln 1 = e$$

D'où $\int_1^e (1+\ln x) = e$

b) En utilisant une intégration par parties, montrer $J = 2e - 1$

$$J = \int_1^e (1+\ln x)^2 dx$$

$u(x) = (1+\ln x)^2 \qquad u'(x) = 2(1+\ln x)\frac{1}{x}$

$v'(x) = 1 \qquad v(x) = x$

$$J = \left[x(1+\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e 2x(1+\ln x)\frac{1}{x}dx$$

$$J = 4e - 1 - 2\int_1^e (1+\ln x)dx = 4e - 1 - 2e$$

$$J = 2e - 1$$

c) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan délimité par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $\mathbf{x} = \mathbf{e}$

$$\mathbf{A} = \int_1^{\mathbf{e}} |\mathbf{f}(\mathbf{x})| \mathbf{dx} 1\mathbf{cm} \times 1\mathbf{cm}$$

$$\mathbf{A} = (\int_1^{\mathbf{e}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx})\mathbf{cm}^2 \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \geq 2 \;\; \forall \mathbf{x} \in \left]0;+\infty\right[$$

$$\int_1^{\mathbf{e}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \int_1^{\mathbf{e}} (1+\ln\mathbf{x})^2 + \frac{1}{\mathbf{x}^2}\mathbf{dx}$$

On a $\mathbf{x} \to \frac{1}{\mathbf{x}^2}$ et $\mathbf{x} \to (1+\ln\mathbf{x})^2$ sont continues sur $\left]0;+\infty\right[$

$$\int_1^{\mathbf{e}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \int_1^{\mathbf{e}} (1+\ln\mathbf{x})^2\mathbf{dx} + \int_1^{\mathbf{e}} \frac{1}{\mathbf{x}^2}\mathbf{dx}$$

$$\int_1^{\mathbf{e}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \int_1^{\mathbf{e}} (1+\ln\mathbf{x})^2\mathbf{dx} + \left[-\frac{1}{\mathbf{x}}\right]_1^{\mathbf{e}}$$

$$\int_1^{\mathbf{e}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx} = 2\mathbf{e} - 1 - \frac{1}{\mathbf{e}} + 1 = \frac{2\mathbf{e}^2 - 1}{\mathbf{e}}$$

D'où $\mathbf{A} = \frac{2\mathbf{e}^2 - 1}{\mathbf{e}}\mathbf{cm}^2$