DEFINITION

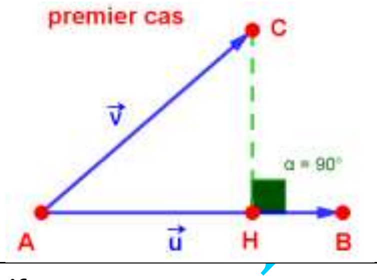
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul de l'espace $(\mathscr{E})$; A et B et C trois points de $(\mathscr{E})$ tel que :

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$; H est la projection de C sur la droite (AB) .

Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ on a $\vec{u}.\vec{v}=0$

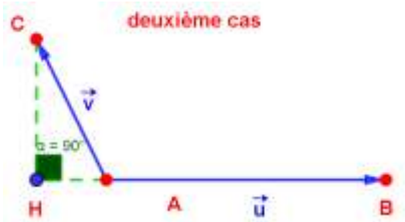
1^{ER} cas le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est :

$$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AH$$



$2^{ième}$ cas le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est :

$$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AB\times AH$$



Remarque

- $\vec{u}.\vec{u}=\vec{u}^2$ est le carré scalaire de $\vec{u}$ est toujours positif .
- $\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}=AB$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ on note : $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}=\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}=AB$.
- $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$.
- $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$ ou $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$

Propriétés

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $(\mathscr{E})$; $\alpha\in\mathbb{R}$ on a :

Linéarité du produit scalaire : $\begin{cases}\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w} \text{ et } (\vec{v}+\vec{w}).\vec{u}=\vec{v}.\vec{u}+\vec{w}.\vec{u}\\ \vec{u}.(\alpha\vec{v})=(\alpha\vec{u}).\vec{v}=\alpha(\vec{u}.\vec{v})\end{cases}$

Base et repère orthonormé

- $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base de l'espace $(\mathscr{E})$ équivaut à $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires

  $\left(\det(\vec{i},\vec{j},\vec{k})\neq 0\right)$

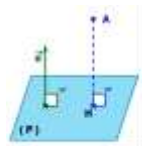
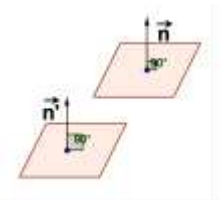
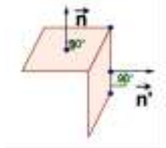
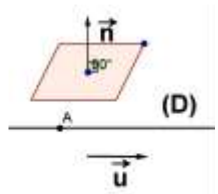
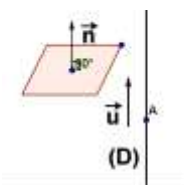
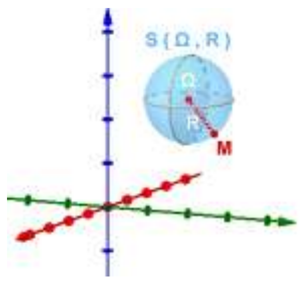
- Prenons un point O de l'espace $(\mathscr{E})$ le quadruplé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est appelé repère de $(\mathscr{E})$
- Si $\vec{k}.\vec{j}=\vec{k}.\vec{i}=\vec{j}.\vec{i}=0$ et $\|\vec{j}\|=\|\vec{i}\|=\|\vec{k}\|=1$ alors :
  - ❖ la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base orthonormée de l'espace .
  - ❖ le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace .

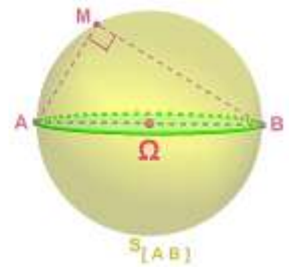
Le reste de ce chapitre ; on considère l'espace $(\mathscr{E})$ est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On prend $\vec{u}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v}(x',y',z')=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$ et $M(x,y,z)$ et $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$ et $C(x_C,y_C,z_C)$

Expression analytique de $\vec{u}.\vec{v}$

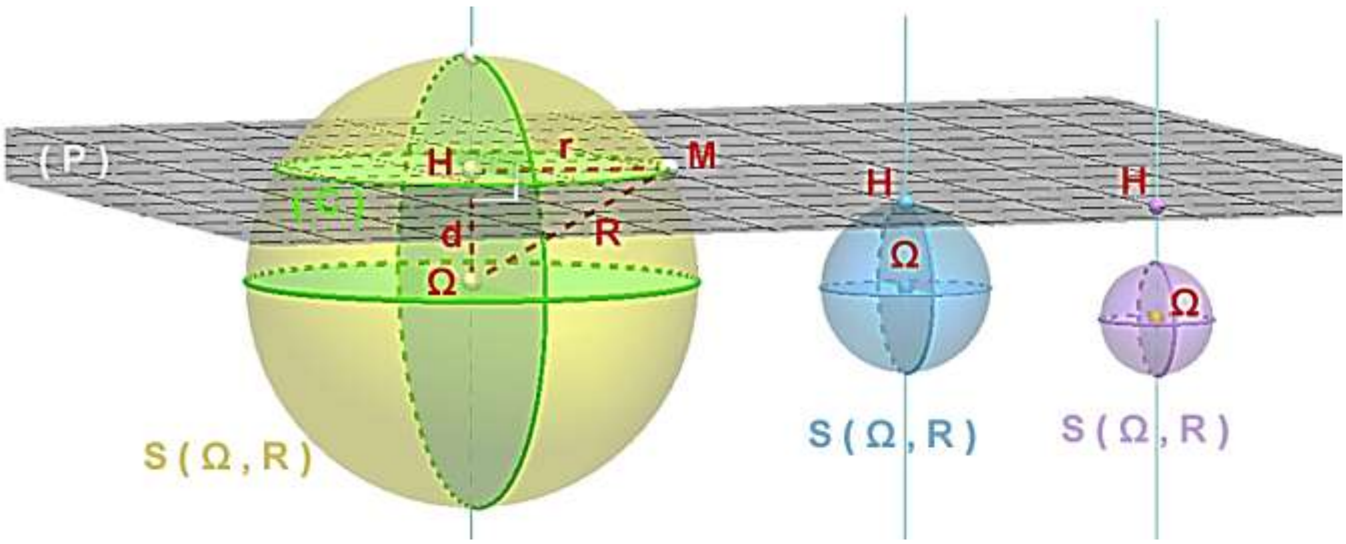
- Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est : $\vec{u}.\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=xx'+yy'+zz'$.
- La norme du vecteur $\vec{u}$ est : $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- La distance AB est : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

<table>
<tr><td>Conséquence</td><td colspan="3">Ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que : $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=k$ avec $\vec{u}(a,b,c)$; $(\vec{u}\neq\vec{0})$ c.à.d. $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ est un plan a pour équation de la forme $ax+by+cz+d=0$</td></tr>
<tr><td>Le plan $P(A,\vec{n})$</td><td colspan="3">• Tout vecteur $\vec{n}$ non nul sa direction est perpendiculaire au plan (P) s'appelle vecteur normal au plan (P).
• $\vec{n}$ est normale au plan $P(A,\vec{u},\vec{v})$ alors $\vec{n}\perp\vec{u}$ et $\vec{n}\perp\vec{v}$.
• Si $\vec{n}$ est normale au plan (P) et passe par A le plan (P) est noté par $P(A,\vec{n})$
• L'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ qui vérifie $ax+by+cz+d=0$ avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ est le plan tel que un vecteur normal est $\vec{n}(a,b,c)$.
• Ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ qui vérifie $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ et $\vec{n}\neq\vec{0}$ est le plan qui passe par A et le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal à ce plan.
• Donc tout plan $P(A,\vec{n}(a,b,c))$ a pour équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$ la réciproque est vraie avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.</td></tr>
<tr><td>Distance d'un point à un plan</td><td>$AH=d(A,(P))=\dfrac{\lvert ax_A+by_A+cz_A+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
avec $A(x_A,y_A,z_A)$ et $(P):ax+by+cz+d=0$</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Parallélisme et orthogonalité de deux plans</td><td colspan="3">$(P_1):ax+by+cz+d=0$ et $(P_2):a'x+b'y+c'z+d'=0$</td></tr>
<tr><td>$(P_2)\parallel(P_1)\Leftrightarrow$ ($\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires)
$(P_2)\parallel(P_1)\Leftrightarrow\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$ (non nuls)
$(P_2)\parallel(P_1)\Leftrightarrow\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ ($\vec{n}$ et $\vec{n}'$)</td><td></td><td>$(P_2)\perp(P_1)\Leftrightarrow\vec{n}'.\vec{n}=0$
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Parallélisme et orthogonalité d'une droite et un plan</td><td colspan="3">$P(B,\vec{n})$ et $D(A,\vec{u})$ et $(P):ax+by+cz+d=0$</td></tr>
<tr><td>$(D)\parallel(P)\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{n}=0$
$(D)\perp(P)\Leftrightarrow$ ($\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Etude analytique d'une sphère</td></tr>
<tr><td>Définition</td><td colspan="2">Ω est un point donné de l'espace $(\mathscr{E})$ et $R>0$ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que $\Omega M=R$ s'appelle le sphère de centre Ω et de rayon R on note (S) ou $S(\Omega,R)$.
Equation cartésienne de $(S)=S(\Omega(a,b,c),r)$ est :
$M(x,y,z)\in(S)\Leftrightarrow\Omega M=R\Leftrightarrow(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=R^2$
ou bien : $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$
avec $d=a^2+b^2+c^2-R^2$</td><td></td></tr>
</table>

	Ω est le milieu de $[AB]$; $[AB]$ est un diamètre du sphère (S) donc A et B appartiennent à (S) On dit la sphère de diamètre $[AB]$ on note (S) ou $S_{[AB]}$. Equation cartésienne de $S_{[AB]}$ est : $M(x,y,z)\in S_{[AB]} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ ou bien $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$	
Ensemble des $M(x,y,z)$	L'ensemble des $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ avec a et b et c et d de $\mathbb{R}$ on pose $A=a^2+b^2+c^2-4d$ est : • $(E)=\varnothing$ si $A<0$. • $(E)=\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)\right\}$ si $A=0$. • Le Sphère $(E)=S\left(\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right),R=\frac{\sqrt{A}}{2}\right)$ si $A>0$.	

Intersection d'un plan (P) et une sphère (S)

$3^{\text{ième}}$ cas	$2^{\text{ième}}$ cas	1^{er} cas



$3^{\text{ième}}$ CAS : $d=\Omega H<R$ on a $(P)\cap(S)=(C)$ (P) coupe (S) suivant le cercle de centre H et de rayon $R_C=\sqrt{R_S{}^2-d^2}$ $R_C=r$ et $R_S=R$	$2^{\text{ième}}$ CAS : $d=\Omega H=R$ on a $(P)\cap(S)=\{H\}$ (P) et (S) sont tangents en H avec $(H\Omega)\perp(P)$	1^{ER} CAS : $d=\Omega H>R$ on a $(P)\cap(S)=\varnothing$ (P) et (S) son disjoints

Remarques :

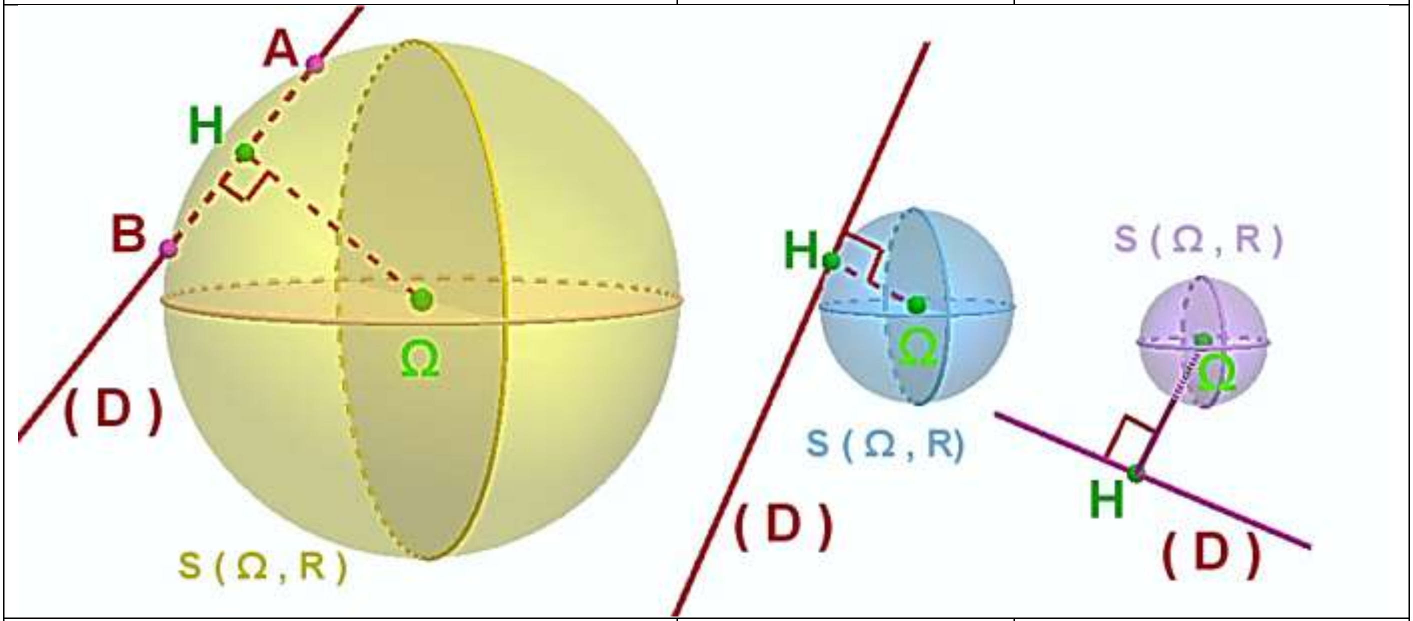
• H est la projection de Ω sur (P) et $d=\Omega H=d(\Omega,(P))=\frac{|ax_\Omega+by_\Omega+cz_\Omega+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

• on détermine H par l'intersection du plan (P) et la droite (D) perpendiculaire au plan passant par Ω

• Vecteur normal $\vec{n}$ au plan (P) est un vecteur directeur de la droite (D)
Théorème :par un point A quelconque d'une sphère (S) il existe un et un seul plan (Q) tangente au sphère (S) au point A . l'équation de (Q) est : $M \in (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0$

Intersection d'une droite (D) et une sphère (S)

$3^{\text{ième}}$ CAS :	$2^{\text{ième}}$ CAS	1^{ER} CAS :



$3^{\text{ième}}$ CAS : $(D) \cap (S) = \{A,B\}$	$2^{\text{ième}}$ CAS / $(D) \cap (S) = \{H\}$	1^{ER} CAS : $(D) \cap (S) = \varnothing$
(D) coupe (S) en deux points A et B (Deux points mais pas le segment $[AB]$)	(D) et (S) sont tangents en H avec $(H\Omega) \perp (D)$	(P) et (S) son disjoints
CONDITION : $d = \Omega H < R$	CONDITION : $d = \Omega H = R$	CONDITION : $d = \Omega H > R$

REMARQUE :	Remarques : • H est la projection de Ω sur (D) . • Si $(D) = D\left(K, \vec{u}\right)$ on a $d = \Omega H = \dfrac{\left\lVert \overrightarrow{K\Omega} \wedge \vec{u} \right\rVert}{\left\lVert \vec{u} \right\rVert}$ (voir chapitre produit vectoriel) .