Cours et* exercices d'applications et de réflexions *sur les nombres complexes (Partie 1)

PROF : ATMANI NAJIB

2ème BAC Sciences Physiques et Sciences de la Vie et de la Terre (2BAC PC et SVT)

NOMBRES COMPLEXES (Partie 1)

I) L'ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

1) Définition d'un nombre complexe.

1.1 L'ensemble $\mathbb{C}$; définition et vocabulaire: On admet qu'il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ ses éléments s'appelles des nombres complexes qui vérifie :

1) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

2) On définit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ deux opérations appelées la somme et la multiplication qui ont les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels.

3) L'ensemble $\mathbb{C}$ contient un nombre non réel noté i et qui vérifie $i^2 = -1$

4) Tout nombre complexe z s'écrit et de façon unique comme : $\boldsymbol{z = a + ib}$ où a et b sont des réels

5) Le réel a s'appelle la partie réel du nombre complexe z ; on écrit : $\boldsymbol{a = Re(z)}$

6) Le réel a s'appelle la partie imaginaire du nombre complexe z ; on écrit : $\boldsymbol{b = Im(z)}$

7) L'écriture : $\boldsymbol{z = a + ib}$ s'appelle l'écriture algébrique du nombre complexe $\boldsymbol{z}$.

Exemples

• Les nombres −1 ; 0 ; 3/4 ; $\sqrt{2}$ sont des nombres réels donc ce sont aussi des éléments de $\mathbb{C}$.

• À l'aide du nombre i et de la multiplication : −i ; 2i ; $i\sqrt{2}$ ... sont aussi dans $\mathbb{C}$.

• Avec les additions, les nombres suivants sont aussi dans $\mathbb{C}$: $-1+i$; $\sqrt{2}+2i$

THÉORÈME : Soient $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x';y') \in \mathbb{R}^2$ deux nombres complexes :

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

L' écriture algébrique d'un nombre complexe est unique.

PREUVE : Soient $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ deux complexes tels que $z = z'$

$$z = z' \Leftrightarrow x+iy = x'+iy' \Leftrightarrow x-x' = i(y'-y)$$

Raisonnons par l'absurde : si $y'-y \neq 0$ alors

$i = \dfrac{x-x'}{y'-y}$ étant un réel, on aboutit à une contradiction. Donc : $y' = y$ et on déduit alors $x-x' = 0$ donc : $x = x'$

La réciproque est claire.

Remarque : $z = x+iy$ et $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

1) $x+iy = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ 2) $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{cases}$

1.3 Remarque :

1) L'ensemble $\mathbb{R}$ est totalement ordonné, c'est-à-dire : $(\forall(x, y) \in \mathbb{R}2)(x \leq y \text{ ou } y \leq x)$

2) L'ensemble des nombres complexe n'est pas ordonné.

1.4 Des sous-ensembles de $\mathbb{C}$

1) L'ensemble $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels est une partie de $\mathbb{C}$; $(\forall x \in \mathbb{R})(x = x + 0i)$

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0$

2) L'ensemble $i\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{C}$, s'appelle L'ensemble des imaginaires purs ; $\boldsymbol{i}\mathbb{R} = \{\boldsymbol{iy}/\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}\}$

$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(z) = 0$

3) $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$ et $\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$

($\subsetneq$ veut dire strictement inclus strictement : $2 + 3i \notin \mathbb{R}$ et $2 + 3i \notin i\mathbb{R}$)

II) LES OPERATIONS DANS $\mathbb{C}$.

1) L'addition dans $\mathbb{C}$.

1.1 Définition

Définition : Soient $z = a + ib$ et $z'= a' + ib'$ deux nombres complexes.

La somme des nombres complexes z et z' est le nombre complexe noté $z + z'$ définie par :

$\boldsymbol{z + z' = (a + a') + i(b + b')}$
On en déduit que : $Re(z + z') = Re(z) + Re(z')$ et
$Im(z + z') = Im(z) + Im(z')$

1.2 Propriétés

L'addition dans l'ensemble $\mathbb{C}$ est :
1) Associative :$(\forall(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3)$
$((z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3))$
2) Commutative : $(\forall(z, z' \in \mathbb{C}^2)(z + z' = z' + z)$
3) 0 est l'élément neutre pour l'addition dans $\mathbb{C}$:
$(\forall z \in \mathbb{C})(0 + z = z + 0 = z)$
4) Chaque élément z dans $\mathbb{C}$ a un symétrique appelé l'opposé de z noté $(-z)$; $z + (-z) = (-z) + z = 0$
On dit que $\mathbb{C}$ muni de l'addition est un groupe commutatif, on le note par : $(\mathbb{C}, +)$

1.3 La différence de deux nombres complexes.

Soient z et z' deux nombres complexes tels que :
$z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ La différence de z et z' est la somme de z avec le symétrique de z' c'est-à-dire :
$z + (-z')$ qu'on la note : $z - z'$
$\boldsymbol{z - z' = (a - a') + i(b - b')}$

2) La multiplication dans $\mathbb{C}$.

2.1 Définition :

Comme la multiplication dans $\mathbb{C}$ prolonge celle dans $\mathbb{R}$ on peut définir la multiplication dans $\mathbb{C}$
par :Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.
Le produit des nombres complexes z et z' est le nombre complexe noté $z \times z'$ définie par :
$z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib') = aa' + ab'i + iba' + bb'i^2$
$i^2 = -1$
$z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$
$\boldsymbol{z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')}$

2.2 Propriétés :

La multiplication dans l'ensemble $\mathbb{C}$ est :
1) Associative :$(\forall(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3)$
$((z_1 \times z_2) \times z_3 = z_1 \times (z_2 \times z_3))$
2) Commutative : $(\forall(z, z') \in \mathbb{C}^2)(z \times z' = z' \times z)$
3) 1 est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{C}$: $(\forall z \in \mathbb{C})(1 \times z = z \times 1 = z)$
4) Chaque élément non nul z dans $\mathbb{C}$ a un symétrique appelé l'inverse de z noté : $(\frac{1}{z}$ ou $z^{-1})$

Et on a $z \times \frac{1}{z} = 1$

On dit que $\mathbb{C}^*$ muni de la multiplication est un groupe commutatif, on le note par : $(\mathbb{C}^*, \times)$
En plus des 8 propriétés que vérifient l'addition et la multiplication dans l'ensemble $\mathbb{C}$ il y a une propriété commune entre les deux opérations :

5) La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{C}$:
$(\forall(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3)$ $(z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3)$

2.3 Le quotient de deux complexes.

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes où $z' \neq 0$ le quotient des nombres z et z' est le produit de z et de l'inverse de z' et se note
$\frac{z}{z'}$ ou $z(z'^{-1})$

2.3 Règles de calculs dans $\mathbb{C}$

Toutes les règles de calculs qu'on a connu dans $\mathbb{R}$ sont vraies dans $\mathbb{C}$.
1) $zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$
2) $z^0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\ z^n = \underbrace{z \times z \times \ldots \times z}\ ) n\ fois$
3) $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$
4) $z^{n+m} = z^n \times z^m$
5) $z^{n-m} = z^n / z^m$
6) $(z^n)^m = z^{n\times m}$
7) $z^n - z_1^n = (z - z_1)(z^{n-1} + z^{n-2}z_1 + \ldots + z^1 z_1^{n-2} + z_1^{n-1})$
8) Si $z \neq 1$ alors : $S = 1 + z^1 + z^2 + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$

somme des termes d'une suite géométrique

Application : Trouver la forme algébrique et déterminer la parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

$z_1 = (2+i)(-1+i) + (1+2i)^2$ $\qquad z_2 = (1 + i\sqrt{3})^3$

$z_3 = \frac{1-3i}{3-i}$ $\qquad z_4 = \frac{1+i}{3-2i}$ $\qquad z_5 = (1+i)^{10}$

Solution :1)

$z_1 = -6 + 5i = a + bi$ donc $\mathrm{Re}(z_1) = -6$ et $\mathrm{Im}(z_1) = 5$

2) $z_2 = (1 + i\sqrt{3})^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 \times (\sqrt{3}i) + 3 \times 1 \times (\sqrt{3}i)^2 + (\sqrt{3}i)^3$

$z_2 = 1 + 3\sqrt{3}i - 3 \times 3 - 3\sqrt{3}i = -8 + 0i \in \mathbb{R}$

car $\mathrm{Im}(z_2) = 0$

3) $z_3 = \frac{1-3i}{3-i} = \frac{(1-3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i-9i+3}{9-i^2} = \frac{6-8i}{10}$

$z_3 = \frac{6}{10} - \frac{8i}{10} = \frac{3}{5} - \frac{4i}{5}$ donc $\mathrm{Re}(z_1) = \frac{3}{5}$ et $\mathrm{Im}(z_1) = -\frac{4}{5}$

4) $z_4 = \frac{1+i}{3-2i} = \frac{(1+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{3+2i+3i-2}{9-4i^2} = \frac{1+5i}{13} = \frac{1}{13} + i\frac{5}{13}$

5) $z_5 = (1+i)^{10} = \left((1+i)^2\right)^5 = \left(1^2 + 2i \times 1 + i^2\right)^5 = (2i)^5$

$z_5 = (2i)^5 = 2^5 \times i^5 = 32 \times \left(i^2\right)^2 \times i = 32i$

est un imaginaire pur car $\text{Re}(z_5) = 0$

REMARQUES :

Lorsque Im(z) = 0, z = a est réel.

Lorsque Re(z) = 0, z = ib est appelé imaginaire pur.

III) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES.

1)L'interprétation géométrique et représentation d'un nombre complexe

Le plans $(\mathcal{P})$ est muni du repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$; et soit $\mathcal{V}_2$ le plan vectoriel associé à $(\mathcal{P})$.

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe le couple (a, b) est associé à un point unique M dans le plan $(\mathcal{P})$.

L'application : $\mathbb{C} \to (\mathcal{P})$

$z \mapsto M(a, b)$

où $a = Re(z)$ et $b = Im(z)$ est une bijection

1) Le point M s'appelle l'image du nombre complexe dans le plan $(\mathcal{P})$, et l'application

2) Le complexe z s'appelle l'affixe du point $\boldsymbol{M}$

on écrit : $z = aff(M)$ et on écrit : $z_M = a + ib$

3) L'application : $\mathbb{C} \to \mathcal{V}_2$

$z \mapsto \vec{u}\ \ (a\,;b)$

où $a = Re(z)$ et $b = Im(z)$ est une bijection

4) Le vecteur $\vec{u}$ s'appelle l'image du nombre complexe dans le plan $(\mathcal{P})$

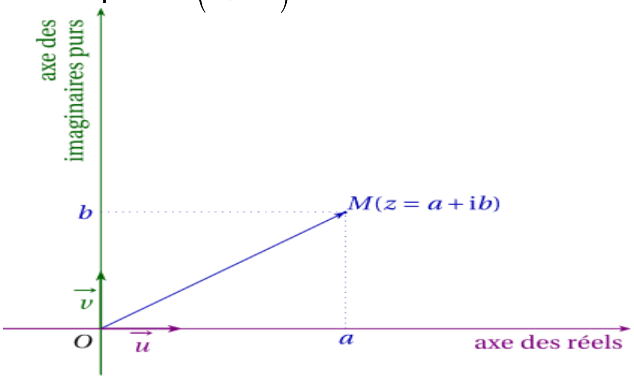
5) Le complexe z s'appelle l'affixe du vecteur $\vec{u}$ on écrit : $z = aff(\vec{u})$ on écrit : $z_{\vec{u}} = a + ib$

6) Le plan $(\mathcal{P})$ s'appelle un plan complexe

7) a)L'axe $\left(O;\vec{u}\right)$ s'appelle l'axe des réels

b) L'axe $\left(O;\vec{v}\right)$ s'appelle l'axe des imaginaires

Dans tout qui va suivre le plan complexe est muni d'un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$



REMARQUES :

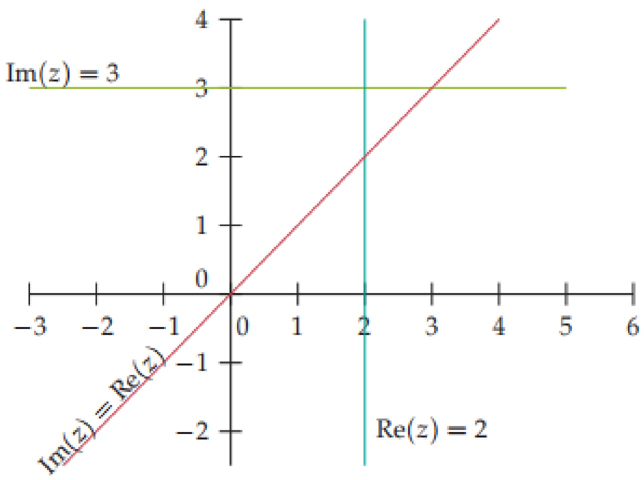
1)Les complexes z = a ∈ R sont des nombres réels et sont représentés sur sur l'axe des Réels.

2)Les complexes z = ib, b ∈ R sont des imaginaires purs et sont représentés l'axe des imaginaires purs.

3)Le plan est alors appelé plan complexe.

Exemple1 : Dans le plan complexe, on a représenté ci-contre les points d'affixe z tels que

- Re(z) = 2
- Im(z) = 3
- Re(z) = Im(z).



2) Les opérations sur les affixes.

Propriété : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans $\mathcal{V}_2$; M et N deux points dans le plan $(\mathcal{P})$ et α un réel ;

On a :

1) $aff(A) = aff(B) \Leftrightarrow A = B$

et $aff(\vec{u}) = aff(\vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$

2) $aff(\vec{u} + \vec{v}) = aff(\vec{u}) + aff(\vec{v})$

3) $aff(\alpha\vec{u}) = \alpha \times aff(\vec{u})$

4) $aff(\overrightarrow{AB}) = aff(B) - aff(A) = z_B - z_A$

Propriété :

1) Soients $[AB]$ un segment de milieu I ; on a :

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

2) Le barycentrer de 2 points pondérés :

$G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ on a $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$

3) Le barycentrer de 2 points pondérés :

$G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ on a :

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

3) Condition complexe d'alignement de 3 points

Soient A, B et C trois points distincts du plan d'affixes respectifs : z_A , z_B et z_C

On sait que :

A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R})(\overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{AB})$

$\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R})(z_C - z_A = \alpha(z_B - z_A))$

$\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R}) (\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \alpha) \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

Propriété : Soient A, B et C trois points distincts du plan d'affixes respectifs z_A , z_B et z_C

les points A, B et C sont alignés si et seulement si :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

Exemple1 : soient dans le plan complexe les points : $A(1+i)$ et $B\left(\frac{1}{2}+2i\right)$ et $C(-1-i)$

Montrer que les les points A, B et C sont alignés.

Solutions :

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\frac{1}{2}+2i-i}{-1-i-i} = \frac{\frac{1}{2}+i}{-1-2i} = \frac{\frac{1}{2}+i}{-2\left(\frac{1}{2}+i\right)} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

Donc : les les points A, B et C sont alignés

Exemple2 : soient dans le plan complexe les points : $A(2;-3)$ et $B(1;1)$ et $C(1;2)$

1)Determiner les affixes des points A et B et C ?

2)Determiner l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$

3) Déterminer l'affixe de I, milieu de $[AB]$.

4)Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

5) Déterminer le barycentre de $\{(A, 2); (B,-1), (C, 3)\}$

6) Déterminer l'affixe du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

Solutions : 1) l'affixe du point A est $z_A = 2-3i$

l'affixe du point B est $z_B = 1+i$

l'affixe du point C est $z_c = 1+2i$

2) $aff(\overrightarrow{AB}) = aff(B) - aff(A) = z_B - z_A$

$$z_{\overrightarrow{AB}} = (1+i)-(2-3i) = -1+4i$$

3) $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2-3i+1+i}{2} = \frac{3-2i}{2} = \frac{3}{2} - i$

4) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(1+2i)-(2-3i)}{(1+i)-(2-3i)} = \frac{-1+5i}{-1+4i}$

$$= \frac{(-1+5i)(-1-4i)}{(-1-4i)(-1+4i)} = \frac{1+4i-5i+20}{(-1)^2-(4i)^2}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{21-i}{17} = \frac{21}{17} - \frac{1}{17}i \notin \mathbb{R}$$

Donc : les points A, B et C ne sont pas alignés.

5) le barycentre de $\{(A, 2); (B,-1), (C, 3)\}$?

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{2z_A - 1z_B + 3z_C}{2-1+3}$$

$$z_G = \frac{2(2-3i)-1(1+i)+3(1+2i)}{2-1+3} = \frac{6-i}{4} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}i$$

6) ABCD est un parallélogramme si et seulement

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ c'est-à-dire : $z_B - z_A = z_C - z_D$

$$z_D = z_C + z_A - z_B$$

On en déduit en remplaçant par les données :

$$z_D = 1+2i+2-3i-1-i = 2-2i$$

Exercice 1 :

soient dans le plan complexe les points :

A ; B ; C ; D ; E d'affixes respectivement :

$z_A = 1+i$ et $z_B = 3+2i$ et $z_C = 2-i$ et $z_D = -2i$

et $z_E = 2$

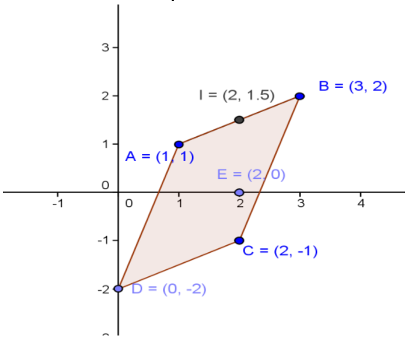
1)Représenter ces points dans le plan complexe

2) Déterminer l'affixe de I milieu de $[AB]$.

3)Determiner l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$

4)montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme

Solution : 1)



I milieu de $[AB]$. Donc : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ donc $z_I - z_A = z_B - z_I$

Donc : $z_I = \dfrac{z_B+z_A}{2}$ donc : $z_I = \dfrac{3+2i+1+i}{2} = 2+\dfrac{3}{2}i$

Donc : $I\left(2;\dfrac{3}{2}\right)$

3) $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 3+2i-(1+i) = 3+2i-1-i = 2+i$

4)il suffit de monter que : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

On a : $z_{\overrightarrow{AB}} = 2+i$

$z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 2-i-(-2i) = 2+i$

Donc : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$ par suite : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

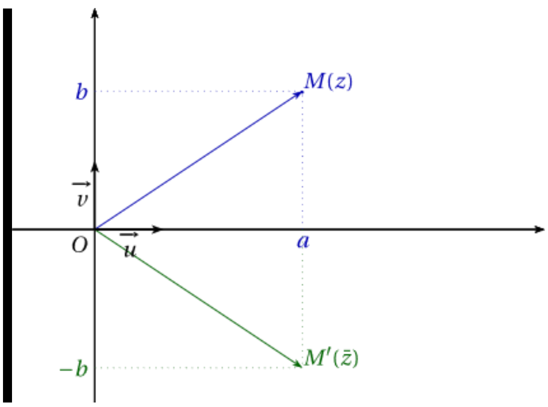
Donc : le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme

IV) LE CONJUGUE D'UN NOMBRE COMPLEXE.

Définition : Soit le nombre complexe $z = a + ib$ (a et b sont des réels) ; le nombre complexe qu'on note $\bar{z}$ et qui est égale à $\bar{z} = a - ib$

S'appelle le conjugué du nombre complexe z

Si z est l'affixe de M, $\bar{z}$ est l'affixe de M' du symétrique de M par rapport à l'axe des réels.



Exemple :1) $z=2+3i$ son conjugué est $\bar{z}=2-3i$

2) $z=3i+6$ son conjugué est $z=-3i+6$

3) $z=3-\sqrt{6}$ son conjugué est $\bar{z}=3-\sqrt{6}$

4) $\overline{-7}=-7;\overline{2i}=-2i;\overline{-5-3i}=-5+3i;\overline{3+2i}=3-2i$

Propriété : (Règles de calculs) $z\in\mathbb{C}$ et $z'\in\mathbb{C}$

1)si $z=x+iy$ alors $z\times\bar{z}=x^2+y^2$

2) $\bar{\bar{z}}=z$ 3) $z-\bar{z}=2i\operatorname{Im}(z)$ 4) $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}(z)$

5) $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\bar{z}$ 6) $z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow z+\bar{z}=0$

7) $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'}$ 8) $\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\bar{z'}$

9) $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\bar{z}}$ 10) $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)}=\dfrac{\bar{z'}}{\bar{z}}$ si $z\neq 0$

11) $\overline{\left(z^n\right)}=\left(\bar{z}\right)^n$ $n\in\mathbb{Z}$

12) $\overline{\lambda z}=\lambda\bar{z}$ $\forall z\in\mathbb{C}$ et $\forall\lambda\in\mathbb{R}$

PREUVE :

• On prouve la 8)

On écrit les complexes z et z' sous forme algébrique : $z=a+bi$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

Et $z'=a'+b'i$ avec $a'\in\mathbb{R}$ et $b'\in\mathbb{R}$

On a alors : $\overline{z\times z'}=\overline{(a+bi)(a'+b'i)}$

$\overline{z\times z'}=\overline{aa'+ab'i+ba'i-bb'}=\overline{(aa'-bb')+(ab'+ba')i}$

$\overline{z\times z'}=\overline{aa'+ab'i+ba'i-bb'}=(aa'-bb')-(ab'+ba')i$

D'autre part :

$\bar{z}\times\bar{z'}=\overline{a+bi}\times\overline{a'+b'i}=(a-bi)\times(a'-ib')$

$\bar{z}\times\bar{z'}=aa'-iab'-a'bi-bb'=(aa'-bb')-(ab'+ba')i$

Ce qui donne bien l'égalité cherchée.

• On prouve la 9)

On a : $z\times\dfrac{1}{z}=1$ donc : $\overline{z\times\dfrac{1}{z}}=\bar{1}$ donc $\bar{z}\times\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=1$

Donc : $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\bar{z}}$ cqfd

• On prouve la 10)

On a : $\frac{z'}{z}=z'\times\frac{1}{z}$ donc $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)}=\overline{\left(z'\times\frac{1}{z}\right)}$

donc $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)}=\overline{z'}\times\overline{\frac{1}{z}}=\overline{z'}\times\frac{1}{\overline{z}}=\frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

• L'égalité 11) se démontre par récurrence si $n\in\mathbb{N}$

En effet : n=0 on a $\overline{\left(z^0\right)}=\left(\overline{z}\right)^0$ car $\overline{1}=1$

Supposons que $\overline{\left(z^n\right)}=\left(\overline{z}\right)^n$

Montrons que : $\overline{\left(z^{n+1}\right)}=\left(\overline{z}\right)^{n+1}$?

$\overline{\left(z^{n+1}\right)}=\overline{z^n\times z}=\overline{z^n}\times\overline{z}=\left(\overline{z}\right)^n\times\overline{z}=\left(\overline{z}\right)^{n+1}$

Donc : $\overline{\left(z^n\right)}=\left(\overline{z}\right)^n\ \forall n\in\mathbb{N}$

Si n est négatif alors $m=-n\in\mathbb{N}$

Donc :

$\overline{\left(z^n\right)}=\overline{\left(z^{-m}\right)}=\overline{\left(\frac{1}{z^m}\right)}=\frac{1}{\overline{z^m}}=\frac{1}{\left(\overline{z}\right)^m}=\left(\overline{z}\right)^{-m}=\left(\overline{z}\right)^n$

Donc : $\overline{\left(z^n\right)}=\left(\overline{z}\right)^n\ \forall n\in\mathbb{Z}$

Exemple1 : Démontrer que $S=(1+i)^5+(1-i)^5$ est un nombre réel.

Solution : On a :

$\overline{S}=\overline{(1+i)^5+(1-i)^5}=\overline{(1+i)^5}+\overline{(1-i)^5}=\overline{(1+i)}^5+\overline{(1-i)}^5$

$\overline{S}=(1-i)^5+(1+i)^5=S$

S est donc bien un nombre réel.

Exemple2 : on pose : $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

et $S=j^{2n}-j^n\quad n\in\mathbb{Z}$

1)montrer que : $j^2=\overline{j}$

2)Démontrer que : $S\in i\mathbb{R}\quad\forall n\in\mathbb{Z}$

Solution :1)

$j^2=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\frac{1}{2}i\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$j^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\overline{j}$

2)il suffit de montrer que : $S+\overline{S}=0$

$S+\overline{S}=j^{2n}-j^n+\overline{j^{2n}-j^n}=\left(j^2\right)^n-j^n+\overline{\left(j^2\right)^n-j^n}$

$S+\overline{S}=\left(\overline{j}\right)^n-j^n+\overline{\left(j^2\right)^n}-\overline{j^n}=\left(\overline{j}\right)^n-j^n+\left(\overline{\overline{j}}\right)^n-\overline{j}^n$

$S+\overline{S}=\overline{j}^n-j^n+j^n-\overline{j}^n=0$

S est donc bien un imaginaire pur

Exemple3 : soit $u\in\mathbb{C}$ tel que $u\notin\mathbb{R}$

Montrer que : $(\forall z\in\mathbb{C})\ |1+uz|=|1+\overline{u}\cdot z|\Rightarrow\ z\in\mathbb{R}$

Solution :1) soit $z\in\mathbb{C}$ tel que :

$|1+uz|=|1+\overline{u}\cdot z|$

Donc : $|1+uz|^2=|1+\overline{u}\cdot z|^2$

Donc : $(1+uz)\overline{(1+uz)}=\left(1+\overline{u}\cdot z\right)\overline{\left(1+\overline{u}\cdot z\right)}$

Donc : $(1+uz)\left(1+\overline{u}\overline{z}\right)=\left(1+\overline{u}\cdot z\right)\left(1+u\cdot\overline{z}\right)$ Car : $\overline{\overline{u}}=u$

Donc : $1+uz+\overline{u}\overline{z}+uz\overline{u}\overline{z}=1+u\overline{z}+\overline{u}z+u\overline{u}z\overline{z}$

Donc : $uz+\overline{u}\overline{z}=u\overline{z}+\overline{u}z$

Donc : $\left(u-\overline{u}\right)z+\left(\overline{u}-u\right)\overline{z}=0$

Donc : $\left(u-\overline{u}\right)\left(z-\overline{z}\right)=0$

Et puisque : $u-\overline{u}\neq0$ car $u\notin\mathbb{R}$

Donc : $z-\overline{z}=0$ Donc : $z=\overline{z}$

Donc : $z\in\mathbb{R}$

Exercice 2: $z\in\mathbb{C}$

Ecrire en fonction de $\overline{z}$ le conjugué des nombres complexes suivants :

1) $Z_1=(2+i)(5-i)$ 2) $Z_2=2z+5i$ 3) $Z_3=\frac{z-1}{-3z+i}$

Solution :

1) $\overline{Z_1}=\overline{(2+i)(5-i)}=\overline{(2+i)}\times\overline{(5-i)}=(2-i)(5+i)$

2) $\overline{Z_2}=\overline{2z+5i}=\overline{2z}+\overline{5i}=2\overline{z}-5i$

3) $\overline{Z_3}=\overline{\left(\frac{z-1}{-3z+i}\right)}=\frac{\overline{z-1}}{\overline{-3z+i}}=\frac{\bar{z}-1}{-3\bar{z}-i}$

Exercice 3: Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $2z+i\bar{z}=5-4i$ 2) $z=2\bar{z}-2+6i$

Solution :1) $z\in\mathbb{C}$

donc : $\exists x\in\mathbb{R}$ et $\exists y\in\mathbb{R}$ / $z=x+yi$

$2z+i\bar{z}=5-4i \Leftrightarrow 2(x+yi)+i(x-yi)=5-4i$

$(2x+y)+i(2y+x)=5-4i \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=5\\2y+x=-4\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}2x+y=5\\-4y-2x=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=5\\-4y-2x+2x+y=8+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=5\\-3y=13 \Leftrightarrow y=-\frac{13}{3}\end{cases}$

Donc : $x=\frac{14}{3}$ par suite: $z=\frac{14}{3}-\frac{13}{3}i$

Donc : $S=\left\{\frac{14}{3}-\frac{13}{3}i\right\}$

2) $z\in\mathbb{C}$ donc : $\exists x\in\mathbb{R}$ et $\exists y\in\mathbb{R}$ / $z=x+yi$

$z=2\bar{z}-2+6i \Leftrightarrow x+yi=2(x-yi)-2+6i$

Donc : $S=\{2+2i\}$

Exercice4 : dans le plan complexe on considére le nombre complexe U et soit M l'image du nombre complexe z et on pose : $U=(z-2i)(\bar{z}-1)$

Et $z=x+yi$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

1)écrire en fonction de x et y la partie réel et la partie imaginaire de U

2) Déterminer l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel

3) Déterminer l'ensemble (C) des points $M(z)$ tels que : U est imaginaire pur

Solution :1) $z=x+yi$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

Donc : $U=(x+yi-2i)(x-yi-1)$

Donc : $U=(x+i(y-2))((x-1)-yi)$

Donc : $U=(x^2+y^2-x-2y)+i(-y-2x+2)$

Donc : $\text{Re}(U)=x^2+y^2-x-2y$ et $\text{Im}(U)=-y-2x+2$

2) U est réel ssi $\text{Im}(U)=0 \Leftrightarrow (\Delta):-y-2x+2=0$

Donc : l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel est la droite d'équation :

$(\Delta):-y-2x+2=0$

3) U est imaginaire pur ssi $\text{Re}(U)=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-x-2y=0$

$\Leftrightarrow x^2-2\times\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2-2\times1y+1^2-1^2=0$

$\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

l'ensemble (C) des points $M(z)$ tels que : U est imaginaire pur est le cercle de centre : $\Omega\left(\frac{1}{2};1\right)$

et de rayon : $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$

Exercice5 :

A) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $2z-3\bar{z}+1+2i=0$ 2) $z+(1-i)\bar{z}+3-2i=0$

3) $(3+i)z+\bar{z}=-i$

B) Déterminer les ensembles suivants :

1) (E1) = $\{M(z)$ / $\frac{z-2i}{z+i}\in\mathbb{R}\}$

2) (E2) = $\{M(z)$ / $\frac{z-2i}{z+i}\in i\mathbb{R}\}$

Exercice6 :Démontrer que :

$S=\left(\sqrt{3}+i\right)^{2n+1}-\left(i-\sqrt{3}\right)^{2n+1}$ est un nombre réel $\forall n\in\mathbb{Z}$

Solution : On a :

$\left(i-\sqrt{3}\right)^{2n+1}=\left(-\left(\sqrt{3}-i\right)\right)^{2n+1}=\left(-1\right)^{2n+1}\times\left(\sqrt{3}-i\right)^{2n+1}$

Donc: $\left(i-\sqrt{3}\right)^{2n+1}=-\left(\sqrt{3}-i\right)^{2n+1}$ car $\left(-1\right)^{2n+1}=-1$

Donc : $S=\left(\sqrt{3}+i\right)^{2n+1}+\left(\sqrt{3}-i\right)^{2n+1}$

$\overline{S}=\overline{\left(\sqrt{3}+i\right)^{2n+1}-\left(i-\sqrt{3}\right)^{2n+1}}=\overline{\left(\sqrt{3}+i\right)^{2n+1}}-\overline{\left(i-\sqrt{3}\right)^{2n+1}}$

$\overline{S}=\left(\overline{\sqrt{3}+i}\right)^{2n+1}-\left(\overline{i-\sqrt{3}}\right)^{2n+1}=\left(\sqrt{3}-i\right)^{2n+1}+\left(\sqrt{3}+i\right)^{2n+1}$

Donc : $\overline{S}=S$

donc S est bien un nombre réel.

Exercice7 : dans le plan complexe on considére le nombre complexe U et soit M l'image du nombre complexe z et on pose : $U=2iz-\overline{z}$

Et $z=x+yi$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

1)écrire en fonction de x et y la partie réel et la partie imaginaire de U

2) Déterminer l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel

Solution :1) $z=x+yi$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

Donc : $U=2i\left(x+yi\right)-\left(x-yi\right)=2ix-2y-x+yi$

Donc : $U=\left(-2y-x\right)+i\left(y+2x\right)$

Donc : $\operatorname{Re}\left(U\right)=-2y-x$ et $\operatorname{Im}\left(U\right)=y+2x$

2) U est réel ssi $\operatorname{Im}\left(U\right)=0\Leftrightarrow(\Delta):y+2x=0$

Donc : l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel est la droite d'équation :

$(\Delta):y=-2x$

V) LE MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE.

1) Définition et applications

Définition : Soit $z=x+yi$ un nombre complexe avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

le réel positif $\sqrt{x^2+y^2}$ 2 s'appelle le module du nombre complexe z et on le note $|z|$

Exemple : calculer le module des nombres complexes suivants : 1) $z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $z'=3-4i$

Solution :

$|z|=\left|\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{1}=1$

$|z'|=|3-4i|=\sqrt{3^2+\left(-4\right)^2}=\sqrt{25}=5;|-2i|=\sqrt{\left(-2\right)^2}=2$

Propriété : Soit $z=x+yi$ un nombre complexe ; on a $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\overline{z}}$

Preuve : en exercice

Exercice :

A) Déterminer les modules des complexes suivants :

1) $z_1=3+\sqrt{3}i$ 2) $z_2=\frac{1}{2}-\sqrt{3}i$ 3) $z_2=\frac{1}{1+i}$

4) $z_4=x$ où $x\in\mathbb{R}$

B) Ecrire sous la forme algébrique les complexes suivants puis déterminer leurs modules :

1) $u_1=\frac{2+5i}{1+3i}$ 2) $u_2=\frac{1+i}{i-3\sqrt{2}}$ 3) $u_3=\left(2-\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{2}+i\right)$

C) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que : A(z) ;B($\overline{z}$) et C($\frac{1}{z}$) soit alignés.

2) Règle de calculs

Propriétés : Pour tous complexes z et z' et pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a :

1) $|\overline{z}|=|-z|=|z|$ 2) $|z|^2=z\overline{z}$ 3)

$|z|=1\Leftrightarrow z\overline{z}=1$

4) $|z|=0\Leftrightarrow z=0$ 5) $|z\times z'|=|z|\times|z'|$

6) $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$ et $\left|\frac{z'}{z}\right|=\frac{|z'|}{|z|}$ si $z\neq0$

7) $|z^n|=|z|^n$ si $z\neq0$ et $\forall n\in\mathbb{Z}$

8) $|z+z'| \le |z|+|z'|$

Exemple : calculer le module des nombres complexes suivants : 1) $z_1 = 5\left(1+i\sqrt{3}\right)$

2) $z_2 = (1+i)\left(\sqrt{3}-i\right)$ 3) $z_3 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^3$

Solution :

1) $|z_1| = \left|-5\left(1+i\sqrt{3}\right)\right| = |-5|\left|1+i\sqrt{3}\right| = 5\sqrt{1+3} = 10$

2) $|z_2| = \left|(1+i)\left(\sqrt{3}-i\right)\right| = |1+i| \times \left|\sqrt{3}-i\right| = \sqrt{2} \times \sqrt{4} = 2\sqrt{2}$

3) $|z_3| = \left|\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^3\right| = \left|\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right|^3 = \left(\left|\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right|\right)^3 = \left(\frac{\left|1+i\sqrt{3}\right|}{|1-i|}\right)^3$

$|z_3| = \left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}\right)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 = 2\sqrt{2}$

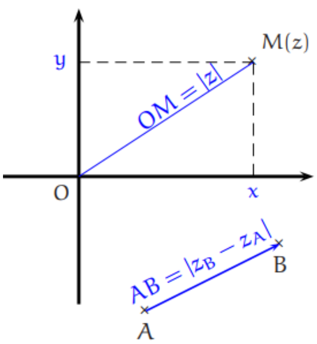
2) interpretation geometrique du module :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé soit M l'image du nombre complexe $z = x+iy$

avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ on a : $M(x;y)$ donc :

$\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = OM = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$

Donc : $|z| = OM$



Propriété : Si A et B ont pour affixes z_A et z_B ,

alors : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB = |z_B - z_A|$

Preuve : soit M tel que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$

On a donc : $z_M = z_B - z_A$ avec z_M l'affixe de M

Donc : $|z_B - z_A| = |z_M| = OM = AB$

Exemple1 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$; les points A, B et C ont pour affixes: $z_A = 2$ et $z_B = 1+\sqrt{3}i$ et $z_C = 3+i\sqrt{3}$

Montrer que le triangle ABC est équilatéral

Solution : il suffit de montrer que : $AC = AB = BC$

$AB = |z_B - z_A| = \left|1+\sqrt{3}i-2\right| = \left|-1+\sqrt{3}i\right| = \sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

$AC = |z_C - z_A| = \left|3+\sqrt{3}i-2\right| = \left|1+\sqrt{3}i\right| = \sqrt{(1)^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

$BC = |z_C - z_B| = \left|3+\sqrt{3}i-1-\sqrt{3}i\right| = |2| = 2$

Donc : $AC = AB = BC$

Exemple2 : Déterminer l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tels que : $|z-1-2i| = |z-7+2i|$

Solution :

Methode1 : Méthode géométrique :

$|z-1-2i| = |z-7+2i| \Leftrightarrow |z-(1+2i)| = |z-(7-2i)|$

On pose : $A(z_A = 1+2i)$ et $B(z_B = 7-2i)$

$\Leftrightarrow |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$

L'ensemble (Δ) cherché est la médiatrice du segment $[AB]$

Methode1 : Méthode algébrique :

$z \in \mathbb{C}$ donc $\exists x \in \mathbb{R}$ et $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que : $z = x+yi$

$|z-1-2i| = |z-7+2i| \Leftrightarrow |x+yi-1-2i| = |x+yi-7+2i|$

$\Leftrightarrow |x-1+i(y-2)| = |x-7+i(y+2)|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-7)^2+(y+2)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2 = (x-7)^2+(y+2)^2$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-4y+4 = x^2-14x+49+y^2+4y+4$

$\Leftrightarrow 12x-8y-48 = 0 \Leftrightarrow (\Delta): 3x-2y-12 = 0$

Exercice 8: Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :a) $|z-3+i| = 5$

b) $|z-4-5i| = |z+2|$

Solution :

a) Soit A le point d'affixe $3-i$

$|z-3+i| = 5 \Leftrightarrow AM = 5$

L'ensemble cherché est le cercle de centre A et de rayon 5.

b) Soient B et C les points d'affixes $4+5i$ et -2

$|z-4-5i| = |z+2| \Leftrightarrow BM = CM$

L'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[BC]$

Exercice9 :Déterminer l'ensemble (C) des points M d'affixe z tels que : $|z-2i| = 3$

Solution :

Methode1 : Méthode géométrique :

$|z-2i| = 3$ On pose : $A(z_A = 2i)$

$\Leftrightarrow |z_M - z_A| = 3 \Leftrightarrow AM = 3$

L'ensemble (C) cherché est le cercle de centre : $A(0;2)$ et de rayon : $R=3$

Methode1 : Méthode algébrique :

$z \in \mathbb{C}$ donc $\exists x \in \mathbb{R}$ et $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que : $z = x + yi$

$|z-2i| = 3 \Leftrightarrow |x+yi-2i| = 3 \Leftrightarrow |x+i(y-2)| = 3$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-2)^2} = 3 \Leftrightarrow (x-0)^2+(y-2)^2 = 3^2$

L'ensemble (C) cherché est le cercle de centre : $A(0;2)$ et de rayon : $R=3$

Exercice10 : Déterminer l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tels que : $|iz+3| = \left|\frac{1}{i}z-4i+1\right|$

Solution :

Methode1 : Méthode géométrique :

$|iz+3| = \left|\frac{1}{i}z-4i+1\right| \Leftrightarrow |i(z-3i)| = \left|\frac{1}{i}(z+4+i)\right|$

$\Leftrightarrow |z-3i| = |z+4+i|$ car $|i| = \left|\frac{1}{i}\right| = 1$

$\Leftrightarrow |z-3i| = |z-(-4-i)|$

On pose : $A(z_A = 3i)$ et $B(z_B = -4-i)$

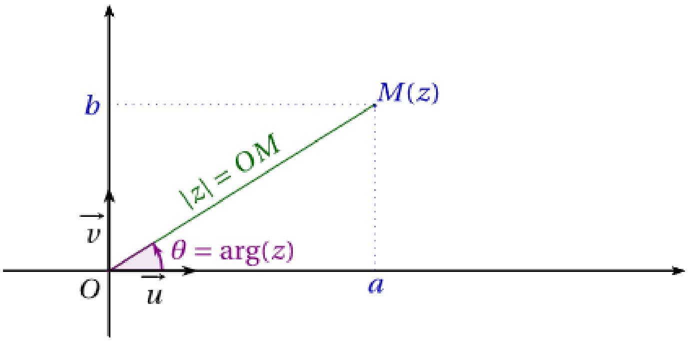
$\Leftrightarrow |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$

L'ensemble (Δ) cherché est la médiatrice du segment $[AB]$

VI) FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

1) L'argument d'un nombre complexe non nul.

Définition : Le plan complexe est menu d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.Soit z un nombre complexe non nul et $M(z)$ son image. On appelle argument du nombre complexe $\boldsymbol{z}$ une mesure (en radian) de l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$ On le note par $\boldsymbol{arg(z)}$

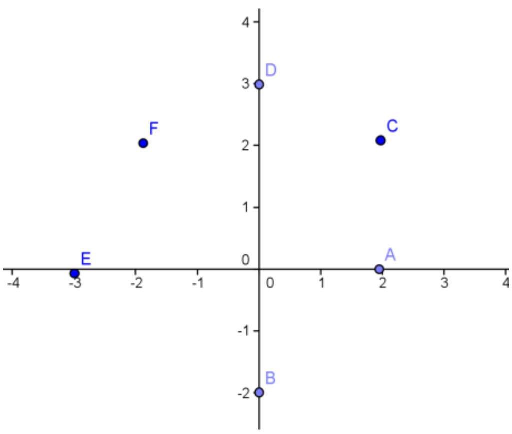


Exemple : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé$(O;\vec{u};\vec{v})$;

on considère les points A ; B ;C ;D ;E ;F qui ont pour affixes: $z_A = 2$ et $z_B = -2i$ et $z_C = 2+2i$ et $z_D = 3i$ et $z_E = -3$ et $z_F = -2+2i$

1)Représenter les points A ; B ;C ;D ;E ;Fdans Le plan complexe

2)on utilisant la représentions déterminer l'argument des complexe : z_A et z_B et z_C et z_D et z_E et z_F **Solution :1)**



2) $\arg z_A = 0[2\pi]$ et $\arg z_B = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\arg z_C = \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\arg z_D = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\arg z_E = \pi[2\pi]$ et $\arg z_F = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$

Remarque : le complexe nul n'a pas d'argument

Propriété : $z \in \mathbb{C}^*$ et $y \in \mathbb{R}^*$

1) $z \in \mathbb{R}^{*-} \Leftrightarrow \arg z \equiv \pi[2\pi]$ 2) $z \in \mathbb{R}^{*+} \Leftrightarrow \arg z \equiv 0[2\pi]$

3) $\arg(iy) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ si $y \succ 0$ et $\arg(iy) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ si $y \prec 0$

4) $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z[2\pi]$ 5) $\arg \bar{z} \equiv -\arg z[2\pi]$

Exemple : $\arg(5i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\arg(-3i) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\arg(2) \equiv 0[2\pi]$ et $\arg(-1) \equiv \pi[2\pi]$

2) Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit $z = a + ib$ un complexe non nul, on a donc $|z| = \sqrt{a^2+b^2} \neq 0$ et par suite :

$$z = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Or : si $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$

alors : $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Et finalement : $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

Propriété : Tout nombre complexe non nul z à une écriture de la forme $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

Où $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$

Cette écriture s'appelle la forme trigonométrique du nombre complexe non nul z

Exercice11 :

Donner la forme trigonométrique du nombre complexe z dans les cas suivants :

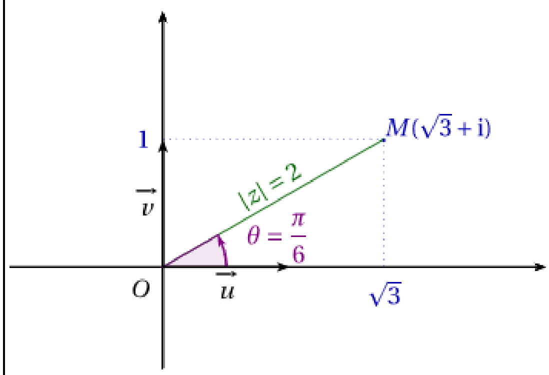
1) $z_1 = \sqrt{3} + i$ 2) $z_2 = 1 - i$ 3) $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i$

4) $z_3 = -1 - \sqrt{3}i$ 5) $z = 7$ 6) $z = -12$

Solution :1) $|z_1| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

$$z_1 = \sqrt{3} + 1i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\arg z_1 \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$$



2) $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$z_1 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Et on a : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$ donc :

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \qquad \arg z_2 \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

3) $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i$ $\qquad |z_3| = \sqrt{\frac{3}{36} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Et on a : $\sin(\pi - x) = \sin x$ et $\cos(\pi - x) = -\cos x$

Donc:

$$z_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

4) $z_3 = -1 - \sqrt{3}i$

$$|z_3| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$z_3 = -1 - \sqrt{3}i = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$\sin(\pi+x)=-\sin x$ et $\cos(\pi+x)=-\cos x$

$$z_4=2\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

Propriété : $z\in\mathbb{C}^*$

Si on a $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ avec $r\succ 0$

Alors $|z|=r$ et $\arg z\equiv\theta[2\pi]$

Exemple : Donner la forme trigonométrique du nombre complexe z dans les cas suivants avec $\theta\in]-\pi;\pi[-\{0\}$

1) $z_1=\sin\theta+i\cos\theta$ 2) $z_2=1-\cos\theta-i\sin\theta$

3) $z_3=\sin\theta+2i\sin^2\frac{\theta}{2}$

Solution : 1)

$$z_1=\sin\theta+i\cos\theta=1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$$

Donc : c'est forme trigonométrique du nombre complexe z_1 donc $|z_1|=1$ et $\arg z\equiv\frac{\pi}{2}-\theta[2\pi]$

2) $z_2=1-\cos\theta-i\sin\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}-i2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$$z_2=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$z_2=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$z_2=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

• Si $\theta\in]0;\pi[$ alors : $\frac{\theta}{2}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc $2\sin\frac{\theta}{2}\succ 0$

Donc : la forme trigonométrique du nombre complexe z_2 est :

$$z_2=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$|z|=2\sin\frac{\theta}{2}$ et $\arg z\equiv\frac{\theta-\pi}{2}[2\pi]$

• Si $\theta\in]-\pi;0[$ alors : $\frac{\theta}{2}\in\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$ donc $2\sin\frac{\theta}{2}\prec 0$

$$z_2=-2\sin\frac{\theta}{2}\left(-\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$z_2=-2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$z_2=-2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)\right)$$

Donc : c'est la forme trigonométrique du nombre complexe z_2 et on a :

$|z|=-2\sin\frac{\theta}{2}$ et $\arg z\equiv\frac{\theta+\pi}{2}[2\pi]$

3) $z_3=\sin\theta+2i\sin^2\frac{\theta}{2}=2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}+2i\sin^2\frac{\theta}{2}$

$$z_3=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

• Si $\theta\in]0;\pi[$ alors : $\frac{\theta}{2}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc $2\sin\frac{\theta}{2}\succ 0$

Donc : la forme trigonométrique du nombre complexe z_3 est : $z_3=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$|z|=2\sin\frac{\theta}{2}$ et $\arg z\equiv\frac{\theta}{2}[2\pi]$

• Si $\theta\in]-\pi;0[$ alors : $\frac{\theta}{2}\in\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$ donc $2\sin\frac{\theta}{2}\prec 0$

$$z_2=-2\sin\frac{\theta}{2}\left(-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$z_2=-2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

Donc : c'est la forme trigonométrique du nombre complexe z_2 et on a :

$|z| = -2\sin\frac{\theta}{2}$ et $\arg z \equiv \pi + \frac{\theta}{2}[2\pi]$

3) Règles de calculs sur les arguments :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$ et $\arg(z') \equiv \theta'\ [2\pi]$

On donc :

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta')$

et par suite :

$zz' = |z||z'|(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$= |z||z'|(\cos\theta\cos\theta' + i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta')$

$= |z||z'|(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta)) = |z||z'|(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'))$

(En utilisant les formules de transformations)

Propriété principale : Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, on a :

$\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$

Propriété Règles de calculs pour les arguments :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls :

1) $\arg(1/z) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$

2) $\arg(z/z') \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$

3) $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi]$

4) $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi]$

5) $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$

Preuves (en exercice)

Notations : Soit z un nombre complexe dont la forme trigonométrique est : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ c'est-à-dire $|z| = r$ et $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$

On écrit : $z = [r, \theta]$

Règles de calculs :

1) $[r,\theta] \times [r',\theta'] = [rr', \theta\theta']$

2)1/ $[r,\theta] = [1/r, -\theta]$

3)$[r,\theta] / [r',\theta'] = [r/r', \theta - \theta']$

4) $-[r,\theta] = [r, \pi + \theta]$

5) $\overline{[r;\theta]} = [r, -\theta]$

6) $[r,\theta]^n = [r^n, n\theta]$

Ces propriétés ne sont que l'assemblage des propriétés sur les calculs des modules et les calculs des arguments.

Exemple :on considère les nombres complexes :

$z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = 1 - i$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$ et $U = z_1^6 \times z_2^2$

1)Ecrivez les nombres complexe z_1 ; z_2 et Z et

Sous leurs formes trigonométriques.

2) Ecrire le complexe Z Sous sa forme algébrique puis en déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Solution :1) $z_1 = \sqrt{3} - i$

$|z_1| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

Donc : $\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

On a : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$

Donc : $z_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left[2; -\frac{\pi}{6}\right]$

On a : $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$

$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

$U = z_1^6 \times z_2^2 = \left[2; -\frac{\pi}{6}\right]^6 \times \left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right]^2$

$U = \left[2^6; -\pi\right] \times \left[2; -\frac{\pi}{2}\right] = \left[2^7; -\pi + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$U = 2^7\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right) = 2^7(0 + 1i) = 2^7 i$

2)

$$Z=\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}=\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}i-i+1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$Z=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Donc : $\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\sqrt{2}}\\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{cases}$$

Exercice12 : Ecrire le complexe $Z=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^{8}$

Sous sa forme algébrique

Solution : On va d'abord écrire $u=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$

Sous la forme trigonométrique

$$u=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Donc : $Z=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^{8}=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{3}\right]^{8}$

$$Z=\left[\sqrt{2}^{8};\frac{8\pi}{3}\right]=16\left(\cos\frac{8\pi}{3}+i\sin\frac{8\pi}{3}\right)$$

$$Z=16\left(\cos\frac{6\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{6\pi+2\pi}{3}\right)$$

$$Z=16\left(\cos\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$Z=16\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=16\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$Z=-8+8\sqrt{3}i$$

Exercice 13 : Déterminer le module et l'argument du nombre complexe z dans les cas suivants :

1) $z=\frac{3}{2}-i\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 2) $z=-5-5i$ 3) $z=-6+6\sqrt{3}i$

4) $z=(3-3i)^{4}$ 5) $z=-2-2\sqrt{3}i$ 6) $z=\sqrt{6}-i\sqrt{2}$

7) $z=\left(\sqrt{3}+3i\right)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 8) $z=\frac{1}{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}$

9) $z=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}$

VII) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES

1) Angles orientés et argument.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{e_1};\vec{e_2}\right)$;

On sait que si le nombre complexe z est non nul alors : $\left(\vec{e_1};\overrightarrow{OM}\right)\equiv\arg z\,[2\pi]$

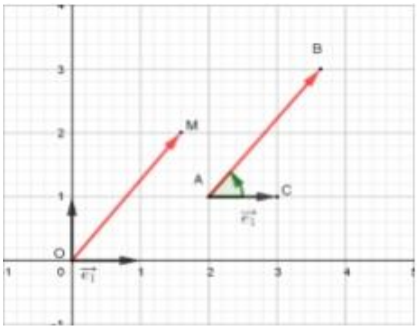
 Soit z et z' deux complexes non nuls d'images respectives M et M', on a

$$\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OM};\vec{e_1}\right)+\left(\vec{e_1};\overrightarrow{OM'}\right)[2\pi]$$

$$\equiv-\left(\vec{e_1};\overrightarrow{OM}\right)+\left(\vec{e_1};\overrightarrow{OM'}\right)[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right)\equiv\arg z'-\arg z\,[2\pi]\equiv\arg\frac{z'}{z}[2\pi]$$

Soient A et B deux points dans le plan complexe d'affixes respectifs a et b, on sait qu'il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OM}$ et M aura Pour affixe le complexe $(b-a)$



Donc : $\left(\vec{e_1};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\arg(b-a)[2\pi]$

Soient A, B et C trois points distincts dans le plan complexe d'affixes respectifs a, b et c, on a :

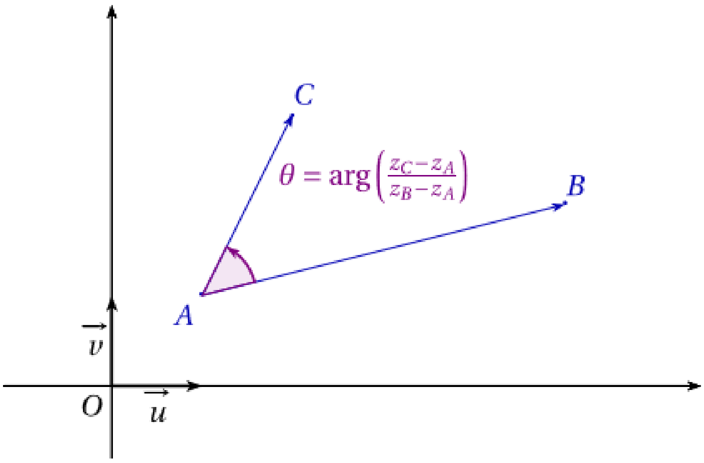
$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB};\vec{e_1}\right)+\left(\vec{e_1};\overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$$

$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv-\left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv-\arg(b-a)+\arg(c-a)[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\arg(c-a)-\arg(b-a)[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$



Soient A, B, C et D quatre points distincts dans le plan complexe d'affixes respectifs a, b, c et d

on a : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{CD}\right)[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD}\right)+\pi[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)+\arg\left(\frac{d-c}{a-c}\right)+\arg(-1)[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv\arg-\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\left(\frac{d-c}{a-c}\right)[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)[2\pi]$

Propriété :1) Soient M et M' et A, B, C et D quatre points distincts dans le plan complexe d'affixes respectifs z, z', a, b, c et d on a :

1) $\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right)\equiv\arg\left(\frac{z'}{z}\right)[2\pi]$

2) $\left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\arg(b-a)[2\pi]$

3) $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$

4) $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)[2\pi]$

Exemple : Soient A, B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs $z_A=3+5i$, $z_B=3-5i$ et $z_C=7+3i$

1)montrer que : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=2i$

2)monter que ABC est un triangle rectangle et que : $BC=2AC$

Solution :1) $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{-4-8i}{-4+2i}=\frac{2i(-4+2i)}{-4+2i}=2i$

$\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_B-z_c}{z_A-z_C}\right)[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)\equiv\arg(2i)[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc : ABC est un triangle rectangle en C

On a **:** $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=2i$ donc: $\left|\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right|=|2i|$

Donc : $\frac{|z_B-z_C|}{|z_A-z_C|}=2$ donc: $\frac{BC}{AC}=2$

Donc : $BC=2AC$

Exemple15 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé$\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$;

Soient A, B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs $a=2i$, $b=\sqrt{2}(1+i)$ et $c=a+b$

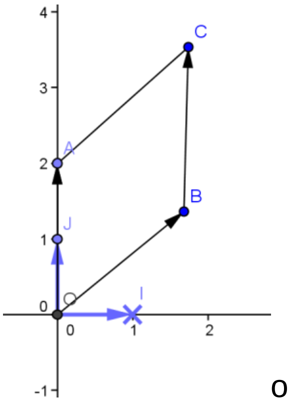
1)Montrer que OBCA est un losange

2) Montrer que : $\arg c\equiv\frac{3\pi}{8}[2\pi]$

Solution :

1)On a : $c=a+b$ donc : $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

Donc OBCA est un parallélogramme



on a : $|a-0|=|2i|=2=OA$

$$OB=|b-0|=\left|\sqrt{2}(1+i)\right|=\left|\sqrt{2}\right|\left|(1+i)\right|=\sqrt{2}\sqrt{2}=2$$

alors : $OB=OA$

donc OBCA est un losange

2) $\arg c\equiv\left(\vec{i};\overrightarrow{OC}\right)[2\pi]$

$\equiv\left(\vec{i};\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)[2\pi]$

$\equiv\left(\vec{i};\overrightarrow{OB}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right)[2\pi]$ (OBCA : losange)

$\equiv\arg b+\frac{1}{2}\arg\frac{a}{b}[2\pi]$

$\equiv\arg b+\frac{1}{2}(\arg a-\arg b)[2\pi]$

Donc : $\arg c\equiv\frac{1}{2}(\arg a+\arg b)[2\pi]$

Or : $a=2i$ donc : $\arg a\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Et : $b=\sqrt{2}(1+i)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$b=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ donc $\arg b\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc : $\arg c\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$

Donc : $\arg c\equiv\frac{3\pi}{8}[2\pi]$

Exercice16 : Soient A, B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs $a=2+i$, $b=3+2i$ et $c=5-i$

Soit α une mesure de l'angle orienté : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

Calculer $\tan\alpha$

Solution : On a : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$

Donc : $\alpha=\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{3-2i}{1+i}=\frac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-5i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$$

$$\left|\frac{c-a}{b-a}\right|=\frac{\sqrt{26}}{2}$$

Donc : $\frac{c-a}{b-a}=\frac{\sqrt{26}}{2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$

Donc : $\sqrt{26}\cos\alpha=1$ et $\sqrt{26}\sin\alpha=-5$

Donc : $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{26}}$ et $\sin\alpha=\frac{-5}{\sqrt{26}}$

Donc : $\tan\alpha=-5$

Exercice17 : On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{e_1};\vec{e_2}\right)$ les points A, B et C d'affixes respectifs : $z_1=-\sqrt{2}$ et $z_2=1+i$ et $z_3=1-i$

1) Placer dans le repère $\mathcal{R}$ les points A, B et C

2) Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ et déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$

3) Montrer que la droite (OA) est la médiatrice du segment $[BC]$ et en déduire que :

$\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\frac{\pi}{8}[2\pi]$

4) Ecrivez le nombre $\frac{z_1 - z_2}{z_1}$ sous sa forme algébrique puis en déduire cos ($\frac{\pi}{8}$) et sin ($\frac{\pi}{8}$)

2) Applications

2.1 Alignement de 3 points.

Corolaire : Trois points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ sont alignés si et seulement si : $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv 0[2\pi]$

Preuve : On sait que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$

Et $\frac{c-a}{b-a} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où $\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = r$ et

$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \theta[2\pi]$

$A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ sont alignés si et seulement si

$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv k\pi[2\pi] \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = r$ ou $\frac{c-a}{b-a} = -r$

$$\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$$

Exercice18 : 1° Vérifier que les points $A(5+3i)$; $B(2+i)$ et $C(-1-i)$ sont alignés

2° Est ce que les points $M(-2+2i)$, $N(2-i)$ et $N(1-i)$ sont alignés ?

2.2 droites parallèles

Corolaire : $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ et D(d)

$(\mathrm{AB}) \parallel (CD)$ si et seulement si : $\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv 0[2\pi]$

Ou $\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv \pi[2\pi]$

2.3 droites perpendiculaires

Corolaire : $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ et D(d)

$(\mathrm{AB}) \perp (CD)$ si et seulement si :

$\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

si et seulement si :

$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}\right)[2\pi]$ ou $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \pi - \left(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}\right)[2\pi]$

Théorème : Soit $A(a)$,$B(b)$, $C(c)$ et $D(d)$ quatre points dans le plan complexe.

Les points A,B,C et D sont cocycliques si et seulement si : $\frac{c-a}{b-a} \times \frac{b-d}{c-d} \in \mathbb{R}^*$

Exercice19 : Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que :

$Z = \frac{5z-2}{z-1}$ Soit un imaginaire pur.

Solution : Pour répondre à cette question, on peut écrire Z sous forme algébrique et dire que sa partie réelle est nulle ou il suffit de calculer la partie réelle.

Il faut que z≠1 . On note A(1)

$z \in \mathbb{C}$ donc $\exists x \in \mathbb{R}$ et $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que : $z = x + yi$

$$Z = \frac{5z-2}{z-1} = \frac{5x-2+5iy}{x-1+iy} = \frac{(5x-2+5iy)(x-1-iy)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$Z = \frac{\left(5x^2-5x-2x+2+5y^2\right)+i\left(-5xy+2y+5xy-5y\right)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$Z = \frac{\left(5x^2-7x+2+5y^2\right)-3iy}{(x-1)^2+y^2}$$

Z est un imaginaire pur

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x^2+5y^2-7x+2}{(x-1)^2+y^2} = 0 \\ z \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+5y^2-7x+2 = 0 \\ x \neq 1 ou y \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{7}{5}x+\frac{2}{5} = 0$$

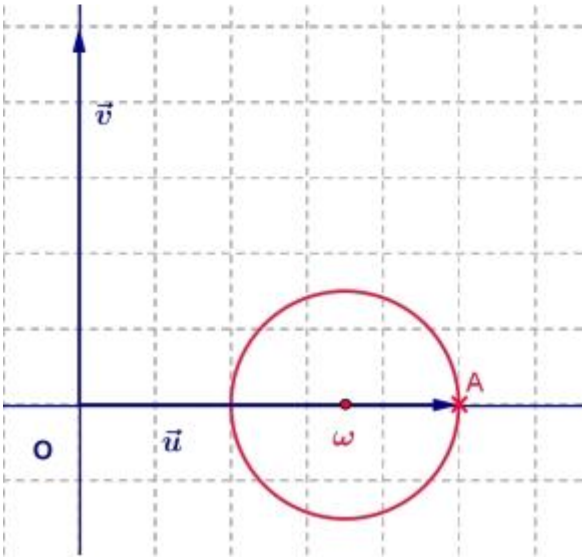
$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{7}{10}\right)^2+y^2-\frac{49}{100}+\frac{2}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{7}{10}\right)^2+y^2 = \frac{9}{100}$$

Il s'agit de l'équation du cercle (C) de centre

$\omega\left(\frac{7}{10}+0\, i\right)$ et de rayon $\frac{3}{10}$.

Le point A(1) appartient à (c).
L'ensemble cherché est donc le cercle (C) privé de A.



Exercices20 :
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $\left|\frac{z-2}{z+1-i}\right|=1$

Solution :

Première méthode (méthode algébrique)

$z=x+yi$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

On doit avoir : $z\neq -1+i$

$z-2=x-2+yi$

$z+1-i=x+1+i\left(y-1\right)$

$$\left|\frac{z-2}{z+1-i}\right|=1 \Leftrightarrow \frac{\left|z-2\right|}{\left|z+1-i\right|}=1$$

$$\Leftrightarrow \left|z-2\right|=\left|z+1-i\right|$$

$$\Leftrightarrow \left(x-2\right)^2+y^2=\left(x+1\right)^2+\left(y-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2=x^2+2x+1+y^2-2y+1$$

$$\Leftrightarrow -6x+2y+2=0 \Leftrightarrow y=3x-1$$

L'ensemble cherché est la droite (D) d'équation $y=3x-1$

Deuxième méthode (méthode géométrique)

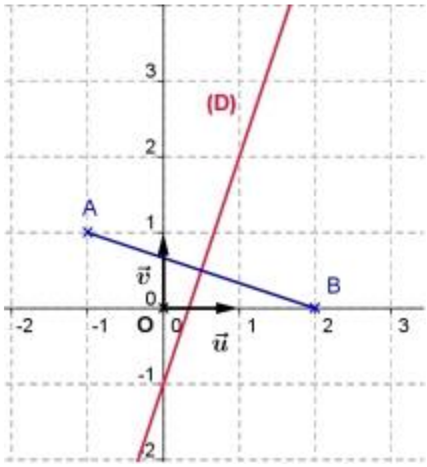
On pose : A(−1+i) et B(2) et M (z)

$\overrightarrow{AM}\left(z+1-i\right)$ donc $\left|z+1-i\right|=AM$

$\overrightarrow{BM}\left(z-2\right)$ donc $\left|z-2\right|=BM$

$$\left|\frac{z-2}{z+1-i}\right|=1 \Leftrightarrow \frac{\left|z-2\right|}{\left|z+1-i\right|}=1 \Leftrightarrow \frac{BM}{AM}=1 \Leftrightarrow BM=AM$$

L'ensemble des points M cherché est la médiatrice du segment [AB].



Exercice21 : soit a et b et c des nombres complexes tels que : $|a|=|b|=|c|=1$ et $a\neq c$ et $b\neq c$

1)Montrer que : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2\times\frac{a}{b}\in\mathbb{R}$

2)en déduire que : $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right)\equiv\frac{1}{2}\arg\left(\frac{b}{a}\right)\left[\frac{\pi}{2}\right]$

Solution : $\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2\times\frac{a}{b}}=\left(\frac{\overline{c}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{a}}\right)^2\times\frac{\overline{a}}{\overline{b}}$

On a si : $|z|=1$ alors : $\overline{z}=\frac{1}{z}$ donc :

$$\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2\times\frac{a}{b}}=\left(\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}\right)^2\times\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}=\left(\frac{\frac{b-c}{bc}}{\frac{a-c}{ac}}\right)^2\times\frac{b}{a}$$

$$\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2\times\frac{a}{b}} = \left(\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}\right)^2\times\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} = \left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2\times\frac{b}{a}$$

Donc : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2\times\frac{a}{b}\in\mathbb{R}$

2)puisque : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2\times\frac{a}{b}\in\mathbb{R}$ alors :

$$\arg\left(\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2\times\frac{a}{b}\right)\equiv 0[\pi]$$

Donc : $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2+\arg\left(\frac{a}{b}\right)\equiv 0[\pi]$

Donc : $2\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right)\equiv-\arg\left(\frac{a}{b}\right)[\pi]$

$$\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right)\equiv\frac{1}{2}\arg\left(\frac{b}{a}\right)\left[\frac{\pi}{2}\right]$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

Bon courage