Nombres complexes

EL KYAL MOHAMED

L'ensemble des nombres complexes est : $\mathbb{C}=\{z=a+ib\ /\ (a;b)\in\mathbb{R}^2\}$ et $i^2=-1$

Soit le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{e_1},\vec{e_2})$

➢ ***Définition et propriétés :***

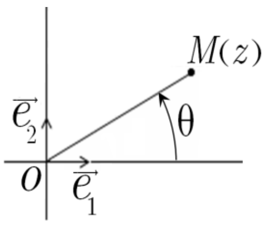
Soit $z=a+ib$ un nombre complexe avec $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

- ***La forme algébrique*** *du nombre complexe* z *est :* $a+ib$.
- ***La partie réelle*** du nombre complexe z est : $Re(z)=a$.
- ***La partie imaginaire*** du nombre complexe z est : $Im(z)=b$.
- Le nombre complexe z est **imaginaire pur** si $Re(z)=0$.
- **Egalité** de deux nombres complexes **:** $z=z' \Leftrightarrow Re(z)=Re(z')$ *et* $Im(z)=Im(z')$
- **Le conjugué** du nombre complexe z est : $\overline{z}=a-ib$
- **Le module** du nombre complexe z est : $|z|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$
- ***L'image*** du nombre complexe $z=a+ib$ est le point $M(a,b)$, noté $M(z)$
- ***L'affixe*** du point $M(a,b)$ est le nombre complexe $z=a+ib$, noté z_M
- ***L'affixe*** du vecteur $\vec{u}(a,b)$ est le nombre complexe $z=a+ib$, noté $z_{\vec{u}}$
- ***L'affixe*** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le nombre complexe $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$
- ***L'argument*** du nombre complexe non nul z est une mesure θ de l'angle orienté $(\vec{e_1},\overrightarrow{OM})$

  noté $arg z$

  on a $\quad arg\,z\equiv\theta[2\pi]$

  $$\cos\theta=\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \quad et \quad \sin\theta=\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$$



- ***La forme trigonométrique*** *du nombre complexe non nul* z *est :*

  $$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=[r,\theta]$$

  avec $r=|z|$ et $arg\,z\equiv\theta[2\pi]$

  $[r,\theta]$ est une écriture réduite du nombre complexe $r(\cos\theta+i\sin\theta)$

- ***La forme exponentielle*** du nombre complexe non nul z est : $z=re^{i\theta}$

  avec $r=|z|$ et $arg\,z\equiv\theta[2\pi]$

➢ **Propriétés:**

	Conjugué	Module	Argument
Opposé	$\overline{-z}=-\overline{z}$	$\lvert -z\rvert=\lvert z\rvert$	$\arg(-z)\equiv\pi+\arg z\ [2\pi]$
Conjugué	$\overline{\overline{z}}=z$	$\lvert\overline{z}\rvert=\lvert z\rvert$	$\arg\overline{z}\equiv-\arg z\,[2\pi]$
Produit	$\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$	$\lvert z\times z'\rvert=\lvert z\rvert\times\lvert z'\rvert$	$\arg(zz')\equiv\arg z+\arg z'\ [2\pi]$
Puissance	$\overline{z^n}=\overline{z}^{\,n}$	$\lvert z^n\rvert=\lvert z\rvert^n$	$\arg(z^n)\equiv n\arg z\ [2\pi]$
Inverse	$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\frac{1}{\overline{z'}}$	$\left\lvert\frac{1}{z}\right\rvert=\frac{1}{\lvert z\rvert}$	$\arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv-\arg z\,[2\pi]$
Quotient	$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$	$\left\lvert\frac{z}{z'}\right\rvert=\frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv\arg z-\arg z'\ [2\pi]$
Somme	$\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$		

	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
Opposé	$-[r,\theta]=[r,\pi+\theta]$	$-re^{i\theta}=re^{i(\pi+\theta)}$
Conjugué	$\overline{[r,\theta]}=[r,-\theta]$	$\overline{re^{i\theta}}=re^{-i\theta}$
Produit	$[r,\theta]\times[r',\theta']=[rr';\theta+\theta']$	$re^{i\theta}\times r'e^{i\theta'}=rr'e^{i(\theta+\theta')}$
Puissance	$[r,\theta]^n=[r^n;n\theta]$	$\left(re^{i\theta}\right)^n=r^ne^{i\,n\theta}$
Inverse	$\frac{1}{[r;\theta]}=\left[\frac{1}{r};-\theta\right]$	$\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$
Quotient	$\frac{[r;\theta]}{[r';\theta']}=\left[\frac{r}{r'};\theta-\theta'\right]$	$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}}=\frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

- $z+\overline{z}=2\,Re\ z$
- $z-\overline{z}=2\,Im\ z$
- $z\overline{z}=[Re\ z]^2+[Im\ z]^2$
- $\lvert z\rvert=0\Leftrightarrow z=0$
- $\forall k\in\mathbb{Z}\quad[r,\theta+2k\pi]=[r,\theta]$

- z *est réel* $\Leftrightarrow\overline{z}=z$
- z *est réel* $\Leftrightarrow\arg z=k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}$
- z *est imaginaire pur* $\Leftrightarrow\overline{z}=-z$
- z *est imaginaire pur* $\Leftrightarrow\arg z=\frac{\pi}{2}+k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}$

- ## Formule de Moivre :

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^{n} = \cos\left(n\theta\right) + i\sin\left(n\theta\right)$$

- ## Formules d'Euler :

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$

- ## Equations du second degré à coefficients réels :

L'équation :		Ensemble de solution:
$z \in \mathbb{C} \quad az^2 + bz + c = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$
	$\Delta = 0$	$S = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$
	$\Delta < 0$	$S = \left\{\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} ; \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$

- ## Nombres Complexes et géométrie:

Notion complexe :	Relation géométrique :
$\left\|z_B - z_A\right\|$	la distance AB
$\left\|z - z_A\right\| = r \quad r > 0$	• $AM = r$ • M appartient au cercle de centre A et de rayon r
$\left\|z - z_A\right\| = \left\|z - z_B\right\|$	• $AM = BM$ • M appartient à la médiatrice de $\left[AB\right]$
$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$	I milieu de $\left[AB\right]$
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$	A,B et C trois points alignés
$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv arg\left(\frac{z_c - z_A}{z_B - z_A}\right)\left[2\pi\right]$	mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

➢ ***Nature d'un triangle:***

	Nature du triangle ABC
$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r; \pm\dfrac{\pi}{2}\right]$	*ABC est un triangle rectangle en A*
$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \theta\right]$	*ABC est un triangle isocèle en A*
$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm\dfrac{\pi}{2}\right]$	*ABC est un triangle isocèle et rectangle en A*
$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm\dfrac{\pi}{3}\right]$	*ABC est un triangle équilatéral*

➢ ***Ecritures complexes des transformations du plan:***

Transformations:	Ecriture complexe :
Translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}}$	$z' = z + z_{\vec{u}}$
Homothétie de centre $\Omega\ \omega$ et de rapport k	$z' - \omega = k\ \ z - \omega$
Rotation de centre $\Omega\ \omega$ et d'angle θ	$z' - \omega = e^{i\theta}\ \ z - \omega$

➢ ***Reconnaitre une translation, une homothétie ou une rotation à partir de leurs expressions complexes :***

Soit le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $o, \vec{e_1}, \vec{e_2}$

Soit $M'\ \ z'$ *l'image d'un point* $M\ \ z$ *par une transformation* F

<table>
<tr><th colspan="3">L'expression complexe du transformation F</th><th>Nature du transformation F</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$z' = az + b$
avec $a;b \in \mathbb{C}^2$
$(a \neq 0)$</td><td colspan="2">$a = 1$</td><td>F est une translation
de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}} = b$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a \neq 1$</td><td>$a \in \mathbb{R}^* - 1$</td><td>F est une homothétie
de rapport a
et de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$
(ω vérifie la relation : $\omega = a\omega + b$)</td></tr>
<tr><td>$a \in \mathbb{C}^* - 1$
avec $|a| = 1$</td><td>F est une rotation
d'angle : $\theta \equiv arg\, a\left[2\pi\right]$
et de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$
(ω vérifie la relation : $\omega = a\omega + b$)</td></tr>
</table>