

## Table des matières

- I.** EXERCICE N° 1 : PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE ET PRODUIT VECTORIEL  
**II.** EXERCICE N° 2 : NOMBRES COMPLEXES .  
**III.** EXERCICE N° 3 : PROBABILITE  
**IV.** EXERCICE N° 4 : EQUATION DIFFERENTIELLE – FONCTION EXPONENTIELLE ET SUITE DE LA FORME  $u_{n+1} = f(u_n)$  .

## 01

Dans l'espace  $(\mathcal{E})$  est rapporté au repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  on considère :

- Les deux points  $A(3,4,2)$  et  $B(2,2,4)$  et  $C(2,4,0)$  et  $\Omega(2,2,-2)$  .

## 01.

..

- a.** Déterminer les coordonnées du vecteur :  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$  . Est-ce que les points A et B et C sont alignés .  
**b.** Donner une équation cartésienne du plan  $(ABC)$  .  
**c.** Donner une équation cartésienne du plan  $(Q)$  passant par  $\Omega$  et parallèle au plan  $(ABC)$  .  
**d.** Calculer : la surface du triangle ABC.

## 02.

On considère la droite  $(D)$  dont un système d'équations est  $\frac{x-1}{2} = \frac{1-y}{2} = -5-z$  .

- a.** Montrer que la droite  $(D)$  est orthogonale au plan  $(ABC)$  .  
**b.** Déterminer les coordonnées du point H intersection de  $(D)$  et  $(ABC)$  .

## 03.

..

- a.** Calculer la distance du point  $\Omega$  à la droite  $(D)$  .  
**b.** Déterminer l'équation cartésienne du sphère  $(S)$  de centre  $\Omega$  et la droite  $(D)$  est tangente au sphère  $(S)$  .  
**c.** Déterminer les coordonnées du point K le point de de la tangente de  $(D)$  et le sphère  $(S)$  .

## 04.

..

- a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$  passant par  $\Omega$  et orthogonale au plan  $(ABC)$  .  
**b.** Calculer la distance d du point  $\Omega$  au plan  $(ABC)$  .  
**c.** En déduit que le plan  $(ABC)$  coupe le sphère suivant un cercle  $(\Gamma)$  .  
**d.** Déterminer  $R_\Gamma$  le rayon de  $(\Gamma)$  . Puis les coordonnées du point  $I_\Gamma$  centre de  $(\Gamma)$  .  
**e.** Déterminer la nature de l'intersection de  $(S)$  et  $(Q)$  et on détermine les éléments caractéristiques de l'intersection .

## 02

## 01.

..

**a.** Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 + 6z + 12 = 0$ .

**b.** Résoudre l'équation différentielle suivante :  $y'' + 6y' + 12y = 0$ .

**02.** On considère le polynome suivant :  $P(z) = z^3 + 4z^2 - 24$  dont  $z$  est un complexe .

**a.** Calculer :  $P(2)$  .

**b.** Déterminer  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}$  tel que pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}$  on a :  $P(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$  .

**c.** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation suivante :  $P(z) = 0$  .

**03.** Dans le plan complexe  $(P)$  rapporté à un repère orthonormé direct  $(0, \vec{u}, \vec{v})$  ; unité de mesure est 2 cm ; on considère les points A et B et C et leurs affixes respectivement  $a = -3 + i\sqrt{3}$  et  $b = -3 - i\sqrt{3}$  et  $c = i2\sqrt{3}$  .

**a.** Déterminer les valeurs de  $n \in \mathbb{N}$  tel que :  $a^n$  est un nombre réel pur .

**b.** Montrer que :  $\frac{b}{a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$  ; puis on déduit la nature du triangle OAB .

**04.** On considère la translation  $t$  qui transforme le point A au point B . Donner l'écriture complexe de la translation  $t$  .

**a.** Déterminer l'affixe du point D image du point C par la translation  $t$  .

**b.** Soit I le milieu du segment  $[BC]$  . Montrer que les deux vecteurs  $\vec{IA}$  et  $\vec{IC}$  sont orthogonaux .

**05.** On considère dans le plan complexe  $(P)$  la transformation  $h$  qui transforme tout point M d'affixe  $z$  au point M' d'affixe  $z'$  tel que :  $z' = 2z - 3i$  .

**a.** Montrer que  $h$  est une homothétie et on détermine l'affixe de son centre  $\Omega$  et son rapport  $k$  .

**b.** Déterminer  $(C')$  l'image du cercle  $(C)$  de centre A et de rayon 3 par l'homothétie  $h$  .

### 03

Un amateur de la chasse utilise deux catégories de cartouches un on le désigne par A et l'autre par B .

- Probabilité tel que le chasseur atteint son but en utilisant cartouche A est  $\frac{8}{10}$  .
- Probabilité tel que le chasseur atteint son but en utilisant cartouche B est  $\frac{6}{10}$  .

**1<sup>ère</sup> expérience :**

- Le chasseur utilise deux cartouches de catégorie A l'une après l'autre cartouche pour atteindre son but .
- On considère la variable aléatoire X définie par « le nombre de fois le chasseur atteint son but en utilisant les deux cartouches l'une après l'autre ».

**01.** Donner l'ensemble  $X(\Omega)$  ( ensemble des valeurs de X ) .

**02.** Montrer que :  $p(X = 1) = \frac{8}{25}$  .

**03.** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

**04.** Calculer  $E(X)$  l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$  .

**2<sup>ème</sup> expérience :**

- Le chasseur utilise un cartouches de catégorie A puis une cartouche de catégorie B pour atteint son but .
- On considère les deux événements suivants :
  - ❖ **C** « Le chasseur atteint son but en utilisant A et aussi par B »
  - ❖ **D** « Le chasseur atteint son but au moins une fois en utilisant A puis B »

**01.** Calculer :  $p(C)$  et  $p(D)$  .

**3<sup>ème</sup> expérience :**

- Le chasseur possède un sac qui contient 3 cartouches de la catégorie A et 4 cartouches de la catégorie B tel que les cartouches sont indiscernables au touche .
- Le chasseur tire du sac simultanément deux cartouches puis il utilise les deux cartouches sans intervenue l'ordre pendant l'utilisation des deux cartouches .

**01.** Calculer la probabilité de l'événement **E** « Le chasseur tire deux cartouches du catégorie A » .

**02.** Calculer la probabilité de l'événement **F** « Le chasseur tire deux cartouches de catégorie différents »

**03.** Montrer que la probabilité de de l'événement **G** « Le chasseur atteint son but deux fois » est

$$p(G) = \frac{328}{700} .$$

**4<sup>ème</sup> expérience :**

**01.** Le chasseur répète la **troisième expérience** ( **3<sup>ème</sup> expérience** ) quatre fois tel que chaque fois le chasseur remet les deux cartouches tirées au sac avant de répéter l'expérience une autre fois .

- On considère la variable aléatoire  $Y$  définie par « le nombre de fois l'événement **F** est réalisé lorsqu'on répète l'expérience précédent quatre fois »
  - a.** Comment on appelle la variable aléatoire  $Y$  et on précise ses paramètres .
  - b.** Donner l'ensemble  $Y(\Omega)$  ( ensemble des valeurs de  $Y$  ) .
  - c.** Donner  $p(Y = k)$  avec  $k \in X(\Omega)$  .
  - d.** Calculer : l'espérance mathématique  $E(Y)$  ; la variance  $V(Y)$  et l'écart-type  $\sigma(Y)$  .

**04**

**1<sup>ère</sup> PARTIE :**

On considère l'équation différentielle suivante :  $(E) : y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$  tel que la fonction  $y$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  .

**01.** Montrer que la fonction :  $h(x) = 2xe^{2x} + 1$  est solution de l'équation  $(E)$  .

**02.** On pose :  $y = z + h$  tel que  $Z$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  .

- a.** Montrer que : si  $y$  est solution de l'équation  $(E)$  alors  $z$  est solution de l'équation  $z' - 2z = 0$  .
- b.** Montrer que : si  $z$  est solution de l'équation  $z' - 2z = 0$  alors  $y$  est solution de l'équation  $(E)$  .
- c.** Ecrire l'équivalence obtenue .
- d.** Résoudre l'équation :  $(E') : z' - 2z = 0$  puis déduis les solutions de l'équation  $(E)$  .

e. Déterminer la fonction  $f$  solution de (E) qui vérifie  $f(0) = 0$ .

## 2<sup>ème</sup> PARTIE

- Soit la fonction  $f$  définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 1 + (2x - 1)e^{2x}$ .
- $(C_f)$  la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  unité de mesure 3 cm. ( sur l'annexe 2 voir page 4 )

### 01. ..

- a. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :  $1 - f(x) \geq 0$ .
- b. Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  puis montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$  ; donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.
- c. Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  ; donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

### 02. ..

- a. Calculer la fonction dérivée de  $f$  et vérifie que  $f'(x) = 4xe^{2x}$ .
- b. Donner le signe de  $f'$  puis donner le tableau de variation de  $f$ .
- c. Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe  $(C_f)$  de  $f$  au point d'abscisse  $x_0 = 0$ .

### 03. ..

- a. Vérifier que la fonction dérivée seconde de  $f$  est :  $f''(x) = 4(2x + 1)e^{2x}$ .
- b. Etudier le signe  $f''$  puis donner la concavité de  $(C_f)$  et précisez les points d'inflexions de la courbe  $(C_f)$ .

### 04. ..

Le tableau ci-contre donner le signe de  $f(x) - x$  sur  $\mathbb{R}$  tel que :  $0,32 < \alpha < 0,33$ .

x	$-\infty$	0	$\alpha$	$+\infty$
$f(x) - x$	+	0	-	+

- a. Construire la courbe  $(C_f)$  de  $f$  et la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  unité de mesure 1 cm. ( la construction sera sur l'annexe 1 voir page 4 ).

### 05. ..

Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $I = [0, +\infty[$ .

- a. Montrer que la restriction  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur l'intervalle  $J$  on le détermine.
- b. Construire la courbe  $(C_{g^{-1}})$  de la fonction réciproque  $g^{-1}$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
- c. Calculer  $g(\alpha)$  ; puis montrer que  $g^{-1}$  est dérivable en  $\alpha$  et calculer  $(g^{-1})'(\alpha)$ .

### 06. ..

- a. On utilise une intégration par partie montrer que :  $\int_{-1}^0 (2x - 1)e^{2x} dx = -1 + \frac{2}{e^2}$ .
- b. Colorer en vert la partie du plan comprise entre la courbe  $(C_f)$  et la droite (D) d'équation  $y = 1$  et les deux droites d'équations  $x = -1$  et  $x = 0$  puis calculer en  $cm^2$  l'aire (la surface).

**07.** L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  avec  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1\text{cm}$ .

**a.** Soit la fonction  $F(x) = \frac{8x^2 - 12x + 5}{8} e^{4x}$  vérifie que :  $F'(x) = (2x - 1)^2 e^{4x}$ .

**b.** Calculer en  $\text{cm}^3$  le volume  $V$  du solide obtenue par la rotation de la courbe  $(C_f)$  au tour de l'axe des abscisses sur l'intervalle  $[-1, 0]$ .

**3<sup>ième</sup> PARTIE :**

**01.** On considère la suite  $(u_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = (2u_n - 1)e^{2u_n} + 1 ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
.

**a.** Ecrire la suite  $(u_n)$  en fonction de la fonction  $f$ .

**b.**

**c.** Montrer que  $f([0, \alpha]) \subset [0, \alpha]$ .

**d.** Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq \alpha$ .

**e.** Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

**f.** On déduit que  $(u_n)$  est une suite convergente.

**g.** Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

