الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2024
- الموضوع -

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SSSS | NS 22F

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⵀⵍⴰ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵓⵏⵏⴰⵙⵜ
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز: 3h
الشعبة المسلك	مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسية)	المعامل: 7

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème, indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites numériques	3 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	4 points
Exercice 4	Calcul des probabilités	2 points
Problème	Etude de fonctions numériques et calcul intégral	8 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module
- ✓ ln désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 (3 points) :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{1+u_n}$, pour tout entier naturel n

0.25 1) a) Vérifier que $u_{n+1} = 4 - \dfrac{6}{1+u_n}$, pour tout entier naturel n

0.5 b) Montrer par récurrence que $2 \leq u_n \leq 4$, pour tout entier naturel n

0.25 2) a) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)(2 - u_n)}{1+u_n}$, pour tout entier naturel n

0.5 b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire que (u_n) est convergente.

3) Soit (v_n) la suite numérique définie par $v_n = \dfrac{2-u_n}{1-u_n}$, pour tout entier naturel n

0.5 a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$

0.5 b) Montrer que $u_n = 1 + \dfrac{1}{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}}$, pour tout entier naturel n

0.5 c) Calculer la limite de la suite (u_n)

Exercice 2 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(-1, 0, -1)$ et $B(1, 2, -1)$, le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(2,-2,1)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(2, -1, 0)$ et de rayon 5

0.25 1) Montrer que $2x - 2y + z + 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P)

0.25 2) Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S)

0.5 3) a) Vérifier que la distance du point Ω au plan (P) est $d(\Omega,(P)) = 3$

0.5 b) En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon à déterminer.

0.5 4) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (P)

0.5 b) Montrer que le point $H(0,1,-1)$ est le centre du cercle (Γ)

0.5 c) Montrer que la droite (Δ) est une médiatrice du segment $[AB]$

Exercice 3 (4 points) :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a=\sqrt{3}(1-i)$ et $b=2+\sqrt{3}+i$

0.5 1) Vérifier que $|a|=\sqrt{6}$ et que $\arg(a)\equiv\frac{-\pi}{4}[2\pi]$

0.75 2) a) Montrer que $\frac{b}{a}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i$ puis vérifier que $\frac{b}{a}=\frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$

0.75 b) En déduire une forme trigonométrique du complexe b puis vérifier que b^{24} est un nombre réel.

3) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$, qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z'. On pose $R(B)=B'$, $R(A)=A'$ et $R(A')=A''$

0.5 a) Vérifier que $z'=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)z$ et que $\arg(a')\equiv\frac{-\pi}{12}[2\pi]$ où a' est l'affixe du point A'

0.5 b) Montrer que l'affixe du point A'' est $a''=\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$ et en déduire que les points O, A'' et B sont alignés.

0.5 c) Montrer que b', l'affixe du point B' , vérifie $b'=\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\overline{a}$

0.5 d) En déduire que le triangle OAB' est rectangle en O

Exercice 4 (2 points) :

Une urne contient sept boules : quatre boules portant le numéro1, deux boules portant le numéro 2 et une boule portant le numéro 3. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire simultanément au hasard deux boules de cette urne.

0.5 1) Montrer que $p(A)=\frac{1}{3}$, où A est l'évènement « les deux boules tirées portent le même numéro »

0.5 2) Montrer que $p(B)=\frac{5}{21}$, où B est l'évènement « La somme des numéros des boules tirées est 4 »

0.5 3) Calculer $p(A\cap B)$

0.5 4) Les événements A et B sont -ils indépendants ? Justifier.

α

Problème (8 points) :

Partie I : On considère les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x)=e^x$ et $v(x)=x$

On considère dans un même repère orthonormé les courbes $(\mathcal{C}_u)$ et $(\mathcal{C}_v)$ des fonctions u et v

0.5 | 1) Tracer dans un même repère orthonormé les courbes $(\mathcal{C}_u)$ et $(\mathcal{C}_v)$

0.25 | 2) Justifier graphiquement que $e^x - x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0.5 | 3) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_u)$, la courbe $(\mathcal{C}_v)$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$

Partie II : On considère la fonction numérique f définie par $f(x)=x+1-\ln\left(e^x-x\right)$.

0.25 | 1) a) Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$

0.5 | b) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=1-\ln\left(1-xe^{-x}\right)$

0.5 | c) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, puis interpréter géométriquement ce résultat.

0.25 | 2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

0.5 | b) Vérifier que pour tout $x<0$, $f(x)=x+1-\ln(-x)-\ln\left(1-\dfrac{1}{xe^{-x}}\right)$

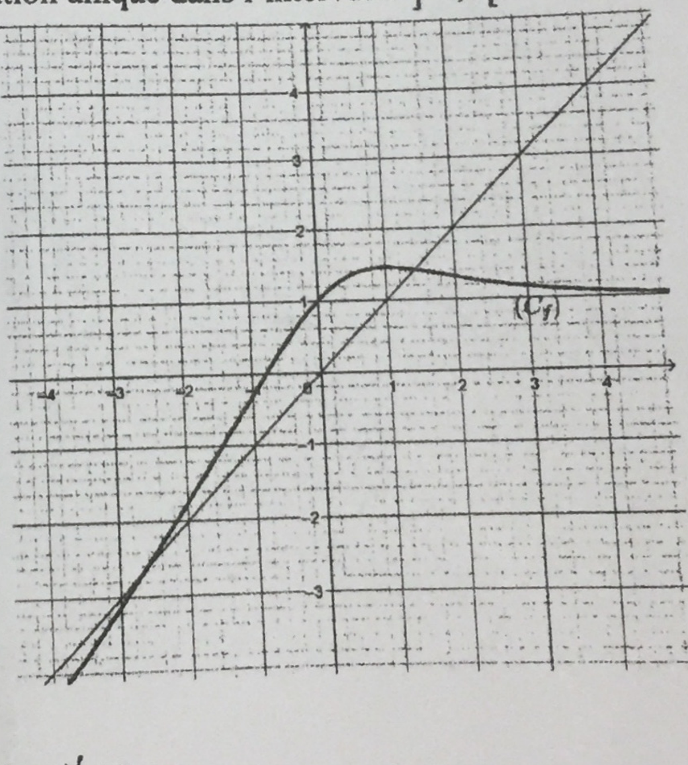
0.75 | c) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ puis déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=x$ au voisinage de $-\infty$

0.5 | 3) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x-x}$

0.5 | b) Etudier le signe de la fonction dérivée de f , puis déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

0.75 | c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]-1,0[$

4) La courbe $(\mathcal{C}_f)$ ci-contre est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.



0.5 | a) Justifier graphiquement que l'équation $f(x)=x$ admet deux solutions α et β.

0.5 | b) Montrer que : $e^\alpha - e^\beta = \alpha-\beta$

5) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I=]-\infty,1]$

0.5 | a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera. (Il n'est pas demandé de déterminer $g^{-1}(x)$)

0.75 | b) Vérifier que g^{-1} est dérivable en 1 et calculer $\left(g^{-1}\right)'(1)$