المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
جهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية السعادة التأهيلية
أيت ملول

Dérivation et ses application

0.1 Dérivabilité en un point

f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I de centre x_0

Définition 1

f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

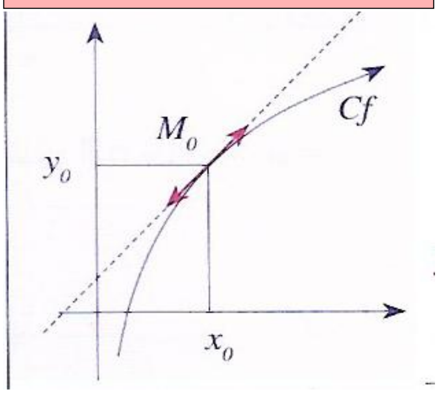
Le nombre $f'(x_0)$ est appelé le nombre dérivée de f en x_0

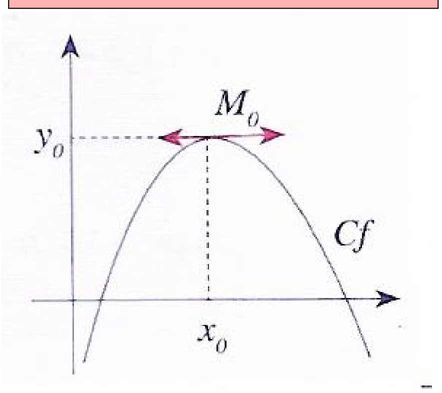
Définition 2

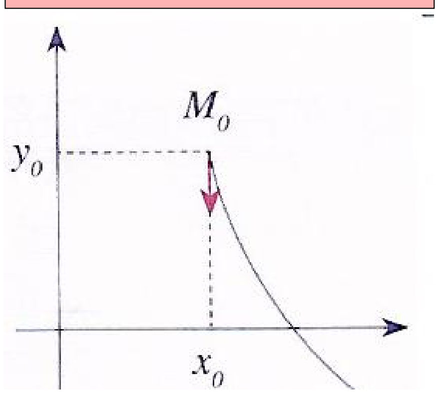
f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

l	0	∞
f est dérivable en x_0	f est dérivable en x_0	f n'est pas dérivable en x_0
Le courbe C_f admit au point $A(x_0; f(x_0))$ une Tangent (T): $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$	Le courbe C_f admit au point $A(x_0; f(x_0))$ Tangent (T) parallèlement à l'axe d'abscisse (Ox): $y = f(x_0)$	Le Courbe C_f admit au point $A(x_0; f(x_0))$ Demi-tangent (T) parallèlement à l'axe d'ordonnée Oy







Propriétés

♣ Si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$ et $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l'$ et $l \neq l'$,Alors la fonction f n'est pas dérivable en x_0 et Le courbe C_f admit une point anguleux.

♣ f est dérivable sur l'intervalle $I \Leftrightarrow f$ est dérivable en tous nombres $x_0 \in I$.

♣ f est dérivable au point x_0 $\Rightarrow$ f est continué au point x_0

0.2 Les Opérations sur les fonctions dérivées.

La fonction f	La fonction dérivée f'
a	0
ax	a
x^n	nx^{n-1}; $n \in \mathbb{Q}^*\{-1\}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $x > 0$
$u+v$	$u'+v'$
$u \times v$	$u'v+v'u$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$; $v \neq 0$

La fonction f	La fonction dérivée f'
$\sqrt{g}$	$\frac{g'}{2\sqrt{g}}$
g^n	$ng^{n-1} \times g'$
$\sqrt[3]{g}$	$\frac{g'}{3\sqrt[3]{g^2}}$
$g \circ h$	$h' \times g' \circ h$
$\sin g$	$g' \cos g$
$\cos g$	$-g' \sin g$
$\tan g$	$g' \times (1+\tan^2 g)$ avec $g \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$

0.3 Dérivée de la fonction $f^{-1}(x)$

Propriété

Si la fonction f est continue et strictement monotonie sur l'intervalle I et f' est la dérivée de f avec $f'(x) \neq 0$ alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f(I)$ et on a :

$$\forall x \in f(I) \quad ; \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

0.4 Dérivée de la fonction $x \to \sqrt[n]{x}$

Propriété 1:

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.
La fonction $g : x \to \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$, et on a :

$$(\forall x \in]0;+\infty[) ; \quad g'(x) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

Propriété 1:

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction $g : x \to \sqrt[n]{u(x)} (n \in \mathbb{N}^*)$ est dérivable sur l'intervalle I; On a : $(\forall x \in I)$; $g'(x) = \frac{u'(x)}{n(\sqrt[n]{u(x)})^{n-1}}$

0.5 Monotonie d'une fonction et signe de sa fonction dérivée.

Propriété

Si $\forall x \in I, f'(x) > 0$; alors f est strictement croissante sur I.
Si $\forall x \in I, f'(x) < 0$; alors f est strictement décroissante sur I.
Si $\forall x \in I, f'(x) = 0$; alors la fonction f est constante sur I.

Étude des fonction numérique

Dans tout ce qui suit f est une fonction numérique de la variable réelle x, (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé

1 Ensemble de définition

$f = \dfrac{v}{u}$ est définie si $u \neq 0$

$f = \sqrt{u}$ est définie si $u \geq 0$

$f = \dfrac{v}{\sqrt{u}}$ est définie si $u > 0$

Remarque

On utilise le tableau de signe dans les cas suivante:

$u(x) = ax^2 + bx + c$

$u(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

$u(x) = (ax+b)(cx+d)$

2 Parité d'une fonction

Pour tout $x \in D_f$ Alors $((-x) \in D_f)$

Si $f(-x) = f(x)$ alors la fonction f est paire.

Si $f(-x) = -f(x)$ alors la fonction f est impaire.

3 Axe de symétrique - Centre de symétrique

Pour tout $x \in D_f$ Alors $((2a-x) \in D_f)$

Le droite : $x = a$ est l'axe de symétrie de $C_f \Leftrightarrow f(2a-x) = f(x)$

Le point $I(a,b)$ est centre de symétrie de $C_f \Leftrightarrow f(2a-x) + f(x) = 2b$

4 Position relative de C_f et le droite (Δ) : $y = ax+b$

On étudier la signe de l'expression :$f(x) - (ax+b)$

- Si $f(x) - (ax+b) > 0$ alors la courbe de la fonction f au-dessus de la droite (Δ).
- Si $f(x) - (ax+b) < 0$ alors la courbe de la fonction f au dessous de la droite (Δ).
- Si $f(x) - (ax+b) = 0$ alors la courbe de la fonction f coupe la droite (Δ).

5 Asymptotes et directions asymptotique des branches infinies

5.1 Asymptote horizontale – Asymptote verticale:

Si $\lim\limits_{a} f(x) = \infty$ Alors C_f admet une asymptote vertical d'équation $x = a$ **(Figure 1:)**

si $\lim\limits_{\pm\infty} f(x) = a$ Alors C_f admet une asymptote horizontal d'équation $y = a$ au voisinage de ∞ **(Figure 2:)**

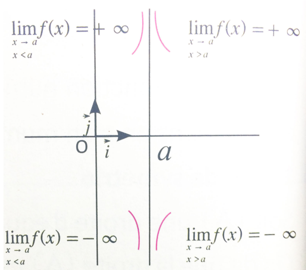


Figure 1:

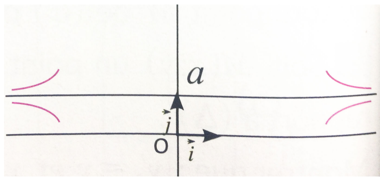


Figure 2:

5.2 Directions asymptotique des branches infinies

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

- ∞
  - (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnés au voisinage de ∞
  - **Figure 3:**
- $a \neq 0$
  - $\lim\limits_{\infty} f(x) - ax$
    - b
      - (C_f) admet une asymptote oblique d'équation : $y = ax + b$ au voisinage de ∞
      - **Figure 4:**
    - ∞
      - (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation : $y = ax$ au voisinage de ∞
      - **Figure 5:**
- 0
  - (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de ∞
  - **Figure 6:**

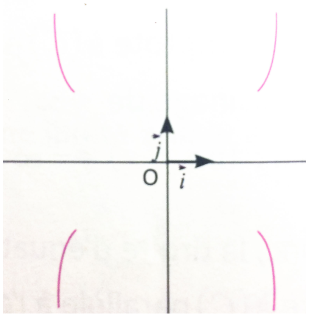


Figure 3:

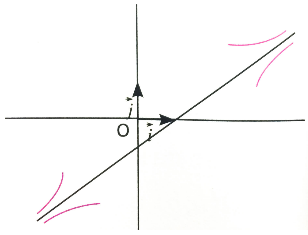


Figure 4:

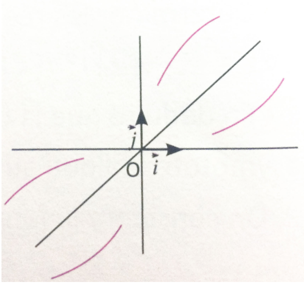


Figure 5:

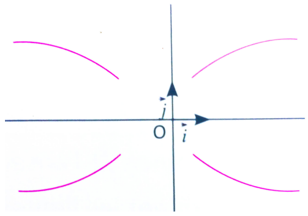


Figure 6:

6 Concavité et points d'inflexion de la courbe d'une fonction f

Propriétés

On Calcule $f''(x)$; Après on étudie son signe.
Les cas suivantes:
Si $\forall x \in I$; $f''(x) \geqslant 0$;Alors la Courbe$C_f$est convexe.
Si $\forall x \in I$; $f''(x) \leqslant 0$;Alors la Courbe C_f est concave.
Le point $I(x_0; f(x_0))$ appelé point d'inflexion de C_f car $f"(x_0) = 0$ et changeant de signe de f'' auteur de point $I(x_0; f(x_0))$

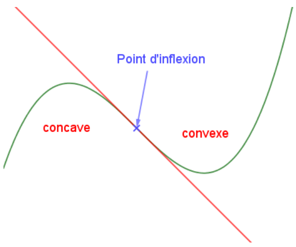


Figure 7:

x		a	
f''	$-$	0	$+$
(C_f)	concave		convexe

x		a	
f''	$+$	0	$-$
(C_f)	convexe		concave

$M(a, f(a))$ est un point d'inflexion

7 L'intersection de C_f avec les axes des repérés .

Le courbe C_f coupe l'axe d'abscisse $\Leftrightarrow f(x) = 0$
Le courbe C_f coupe l'axe d'ordonnée $\Leftrightarrow x = 0$