TD -FONCTIONS LOGARITHMIQUES

Exercice1 : déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f : x \to ln(x+1)$ 2) $g : x \to ln(x^2-3x+2)$

3) $h : x \to \frac{x}{\ln x}$ 4) $k : x \to \ln x + ln(x-1)$

5) $m : x \to ln\left(\frac{x-4}{x+1}\right)$

Exercice2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes : 1) $ln(x-2)=0$

2) $ln(3x-1)=ln(5x-10)$ 3) $ln(2x-1)-ln(1-x)=0$

4) $ln(2x)=ln(x^2+1)$ 5) $ln(2x-6)\geq 0$

6) $ln(x-1)-ln(3x+1)<0$

Exercice3 : On pose $l\,n(2)\simeq 0,7$ et $l\,n(3)\simeq 1,1$

Calculer: $l\,n(6)$; $l\,n(4)$; $l\,n(8)$; $l\,n(72)$

$l\,n\left(\frac{1}{2}\right)$; $l\,n\left(\frac{3}{2}\right)$; $l\,n(\sqrt{2})$; $l\,n(\sqrt{6})$; $l\,n(3\sqrt{2})$

$ln(12\sqrt[3]{3})$; $A=ln\sqrt{2+\sqrt{2}}+ln\sqrt{2-\sqrt{2}}$;

$B=\frac{1}{4}ln81+ln\sqrt{3}-ln\frac{1}{27}$ et $C=ln(\sqrt{2}+1)^{2015}+ln(\sqrt{2}-1)^{2019}$

Exercice4 : On pose $\alpha = ln(a)$ et $\beta = ln(b)$
Calculer en fonction de α et β les réels suivants :

$\ln(a^2b^5)$ et $\frac{1}{\sqrt[6]{a^7b}}$

Exercice5 : simplifier et calculer :

$A=\ln(e^2)+\ln(e^4)-\ln\left(\frac{1}{e}\right)$

$B=2\ln(\sqrt{e})+\ln(e\sqrt{e})-\frac{1}{3}\ln(e^9)$

Exercice6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1) $ln(2x-1)=\frac{3}{2}$ 2) $2(\ln x)^2+\ln x-6=0$

3) $3(\ln x)^2+2\ln x-1=0$ 4) $\frac{\ln x+3}{\ln x-1}\geq -1$

5) $lnx+ln(x-1)-l\,n2=l\,n3$

6) $ln(2x+5)+ln(x+1)\leq ln4$

7) $ln(14-x)\succ ln(10+7x-3x^2)$

Exercice7 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases}3\ln x+\ln y=2\\2\ln x-\ln y=3\end{cases}$

Exercice8 : déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f : x \to \frac{ln(x+1)}{ln(\ln x)}$ 2) $g : x \to \sqrt{1-ln(e-x)}$

3) $h : x \to \frac{x}{\sqrt{(ln(2x))^2-1}}$

Exercice9 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x)+1}{\ln x}$ 2) $\lim_{x\to+\infty}\left(ln^2(x)-lnx\right)$

3) $\lim_{x\to+\infty}x-lnx$ 4) $\lim_{x\to0^+}ln^2(x)+lnx$

5) $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}+lnx\right)$ 6) $\lim_{x\to0^+}x^4\log x$

7) $\lim_{x\to0^+}2x-x^3\ln x$ 8) $\lim_{x\to+\infty}xln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

9) $\lim_{x\to0^+}x(ln(x))^2$ on pose : $X=\sqrt{x}$

10) $\lim_{x\to+\infty}\frac{ln\left(x^2+3x\right)}{x-1}$ 11) $\lim_{x\to0^+}x^2\left(\ln x\right)^5$

Exercice10 : Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée de la fonction suivante :

$f(x)=\ln\left(3x^2+5\right)$

Exercice11 :calculer la dérivée des fonctions définies par :1) $f(x)=x^2-\ln x$ 2) $f(x)=x\ln x$

3) $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$

Exercice12 :calculer la dérivée de la fonction définie sur $I=]-2;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\sqrt[4]{x^3+8}}{\left(x^2+1\right)^3}$

Exercice13 : Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\ln\left|\ln|x|\right|$

2) $f(x)=\ln\left|\sin^2 x+3\sin x+4\right|$

Exercice14 : Déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes :

1) $I=\mathbb{R};\ f(x)=\frac{x^3}{x^4+2}$ 2) $I=]0;1[;\ g(x)=\frac{1}{xlnx}$

3) $I=]-\infty;1[;h(x)=\frac{1}{x-1}$ 4) $I=\left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right[;k(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$

5) $M(x)=\frac{1}{x^2-1}$ (Essayer d'écrire $g(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}$ où a et b des réels à déterminer).

6) $N(x)=\frac{x^3+2x^2-3x+2}{x-3}$

7) $I=]3;+\infty[;q(x)=\frac{1}{(x-2)\ln(x-2)}$

Exercice 15 : Considérons la fonction f définie par : $f(x)=\frac{5x+1}{x^2+x-2}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et Déterminer les réels a et b tels que : $(\forall x\in D);\ f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}$

2) En déduire la fonction primitive de f sur $]-\infty;-2[$ Tel que $F(-3)=\ln 2$

Exercice 16 : simplifier et calculer :

1) $\log_8 4$ 2) $\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2}$ 3) $\log_{\sqrt{3}} 9$

4) $A=\log_2\left(\frac{1}{5}\right)+\log_2(10)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[5]{3}\right)$

Exercice17 : On pose $\alpha=\log_{40}(100)$ et $\beta=\log_{16}(25)$ Calculer β en fonction α

Exercice18 : simplifier et calculer :

1) $\log_{10}100$ 2) $\log_{10}0,0001$

3) $A=\log(250000)+\log\sqrt{250}-\log(125)$

Exercice 19 :déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $\left(\frac{3}{2}\right)^n\geq10^{20}$

Exercice 20 :1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

1) $\log_3(2x)\times\left(\log_5(x)-1\right)=0$

2) $2\left(\log x\right)^2-19\log x-10=0$

3) $\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\geq1$

4) $\log_{2x}(4x)+\log_{4x}(16x)=4$

Où $\log$ est le logarithme décimal

Exercice 21 :1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations et équations suivantes :

1) $\log_3\left(7x-1\right)^2=0$ 2) $\log_3(5x+1)=2$

3) $\frac{\log_3(5x+1)}{\log_3\left(7x-1\right)^2}\leq1$

Exercice 22:A) soit la fonction g définie par : $g(x)=x-lnx$

1) Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g et déterminer les limites aux bornes

de D_g

2) Déterminer la fonction dérivée de la fonction g puis dresser le tableau de variation de g

3) en déduire que : $\forall x > 0 \qquad x > lnx$

B) soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x + lnx}{x - lnx}; si..x \succ 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

1)Montrer que $D_f = [0;+\infty[$

2)Montrer que f est continue à droite de 0

3)calculer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

4) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0

5) Montrer que : $\forall x \in]0;+\infty[\quad f'(x) = \dfrac{2(1-lnx)}{(x-lnx)^2}$

6) Dresser le tableau de variation de f

7)déterminer les points d'intersections de C_f et la Droite : $(\Delta): y = 1$

8) Montrer que : C_f coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse dans $\left]\dfrac{1}{2};1\right[$

9) Construire la courbe C_f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ ($ln2 \approx 0,7$, $e \approx 2,7$)

Exercice 23 : Considérons les fonctions f et g définies sur $]-1;+\infty[$ par :

$f(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$ et $g(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}$

1)a)calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to-1^+} f(x)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to-1^+} g(x)$

b) montrer que : $\forall x \in]-1;+\infty[$ on a :

$$g(x) = (1+x)\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{6(1+x)}\right)$$

et en déduire : $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

c) Etudier les variations les fonctions f et g Puis dresser les tableaux de variations de f et g

2) en déduire que $\forall x \in]0;+\infty[$:

$$x - \frac{x^2}{2} \prec \ln(1+x) \prec x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

3) calculer : $\lim_{x\to0^+} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}$

4)monter que : $\forall x \in]0;+\infty[$:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \prec \ln(1+x) \prec x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Exercice 24 : Considérons la fonction f définie par : $f(x) = x - 3 + \dfrac{3}{2x} + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

2)montrer que le domaine d'étude de f est : $D_E =]0;1[\cup]1;+\infty[$

3) Déterminer les limites aux bornes de D_E

4) Etudier les variations de f sur D_E

5) Etudier les branches infinies de (C_f) la courbe de f

6). Construire la courbe (C_f) dans D_E

Exercice 25 :1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$\log_x (x + 1) = \log_{x+1} (x)$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$\log_2(x) > \log_x(2)$

Exercice 26 : Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

2) Résoudre l'équation $f(x) = 1$

3) Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 1$

4) Etudier la dérivabilité de la fonction f à gauche de e

5) Etudier les variations de f et en déduire que f est une bijection de D_f vers un intervalle J.

6) Construire dans le même repère Cf et $C_{f^{-1}}$

Exercice 27 : Considérons la fonction g définie par : $g(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g

2. a) Montrer que la fonction g admet un prolongement par continuité en 0 noté g

b) Etudier la dérivabilité de g en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3. Déterminer les limites de la fonction g en +∞ et en -1 à gauche.

4. Déterminer la fonction dérivée de la fonction g puis dresser le tableau de variation de g

5. Etudier les branches infinies de la courbe Cg.

6. Construire la courbe Cg

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien