Année scolaire : 2022 – 2023	Solution de l'examen blanc 2023	AGOUZAL 2 BPCF – 2BSVT

Exercice 1 :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct, on considère les points A(0;1;1), B(0;0;2) et C(3;0;0).

1) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$

C(3,0, 0) ; B(0,0, 2) ; A(0,1, 1)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}0 & 3\\ -1 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= 2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

D'où $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$

b) En déduire que $2x + 3y + 3z - 6 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

Soit M(x ;y ;z)$\in$ (ABC)

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(2;3;3)$ est un vecteur normal à (ABC)

$$(ABC) : 2x + 3y + 3z + d = 0$$

or $C(3;0;0) \in (ABC)$

Donc $2 \times 3 + 3 \times 0 + 3 \times 0 + d = 0$ donc $d = -6$

D'où (ABC) : 2x +3y + 3z – 6 = 0

2) Soit le point E(0, -1, 3) et (S) l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{ME} = 0$

Montrer que (S) est la sphère de centre B et de rayon 5

(S) est la sphère de diamètre $[AE]$ donc de centre le milieu de $[AE]$ et de rayon $\frac{AE}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{2}$

$\left(\frac{0+0}{2};\frac{-1+1}{2};\frac{3+1}{2}\right)$ donc (S) de centre $B(0;0;2)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

3) Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon.

Puisque B est le centre de (S) et B$\in$(ABC) donc (ABC) coupe la sphère (S) suivant le grand cercle (C) de centre B et de rayon $\sqrt{2}$. $(d(B,(ABC)) = 0)$

Exercice 2 :

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$

$z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$

$\Delta = (-4\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 16 = -16$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \frac{4\sqrt{3} + 4i}{2} = 2\sqrt{3} + 2i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{3} - 2i$

D'où $S = \left\{2\sqrt{3} - 2i; 2\sqrt{3} + 2i\right\}$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2\sqrt{3} + 2i$; $b = 2\sqrt{3} - 2i$; $c = \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2i$

a) Ecrire a et b sous forme trigonométrique et montrer que : $\left(\frac{a}{4}\right)^{2023} + \left(\frac{b}{4}\right)^{2023} = -\sqrt{3}$

$|a| = |2\sqrt{3} + 2i| \Leftrightarrow |a| = 2\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} \Leftrightarrow |a| = 4$

$a = 4(\frac{2\sqrt{3}}{4} + i\frac{2}{4}) \Leftrightarrow a = 4(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})$

Donc $a = 4(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}))$

On a $b = \overline{a}$ donc $|b| = |a|$ et $\arg b \equiv -\arg a[2\pi]$

Donc $b = 4(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))$ $(\arg\overline{a} \equiv -\arg a[2\pi])$

$\frac{a}{4} = (\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}))$ et $\frac{b}{4} = (\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))$

$\left(\frac{a}{4}\right)^{2023} = (\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}))^{2023} = \cos(\frac{2023\pi}{6}) + i\sin(\frac{2023\pi}{6})$

$\left(\frac{a}{4}\right)^{2023} = \cos(666\pi + \frac{7\pi}{6}) + i\sin(666\pi + \frac{7\pi}{6})$

$\left(\frac{a}{4}\right)^{2023} = \cos(\frac{7\pi}{6}) + i\sin(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$

$\left(\frac{b}{4}\right)^{2023} = e^{-i\frac{2023\pi}{6}} = e^{-i668\pi}e^{i\frac{5\pi}{6}} = 1 \times e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$$\left(\frac{a}{4}\right)^{2023} + \left(\frac{b}{4}\right)^{2023} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

D'où $\left(\frac{a}{4}\right)^{2023} + \left(\frac{b}{4}\right)^{2023} = -\sqrt{3}$

b) Montrer que d l'affixe du point D image du point A par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ est $4i$.

$R(A) = D \Leftrightarrow d - 0 = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - 0) \Leftrightarrow d = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(2\sqrt{3} + 2i)$

$\Leftrightarrow d = (1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i) \Leftrightarrow d = \sqrt{3} + i - \sqrt{3} + 3i$

D'où $d = 4i$

c) Montrer que le point D appartient à la droite (BC)

Montrons que les points B, C et D sont alignés.

$\frac{c-d}{b-d} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2i - 4i}{2\sqrt{3} - 2i - 4i} \Leftrightarrow \frac{c-d}{b-d} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} - 2i}{2\sqrt{3} - 6i}$

Donc $\frac{c-d}{b-d} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3} - 3i}{\sqrt{3} - 3i}$ donc $\frac{c-d}{b-d} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$

Donc les points B, C et D sont alignés

D'où $D \in (BC)$

3) Soit (C) l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $\left|z-2\sqrt{3}+2i\right|=4$ montrer que (C) est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

On a $M(z)$ et $B(2\sqrt{3}-2i)$

$\left|z-2\sqrt{3}+2i\right|=4 \Leftrightarrow \left|z-(2\sqrt{3}-2i)\right|=4 \Leftrightarrow BM=4$

Donc $\left|z-2\sqrt{3}+2i\right|=4 \Leftrightarrow BM=4$

(C) l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $\left|z-2\sqrt{3}+2i\right|=4$ est le cercle de centre B et de rayon 4

Exercice 3 :

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1}=\frac{17U_n+56}{U_n+18} \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad U_0=8$$

1) a) Montrer que : $U_n>7 \quad \forall n\in N$

Pour n = 0 on a $U_0=7$ donc $U_0>7$

Soit $n\in\mathbb{N}$ supposons que $U_n>7$ et montrons que $U_{n+1}>7$ c'est-à-dire $U_{n+1}-7>0$

$$U_{n+1}-7=\frac{17U_n+56}{U_n+18}-7=\frac{17U_n+56-7U_n-126}{U_n+18}$$

$$U_{n+1}-7=\frac{10(U_n-7)}{U_n+18}$$

On a $U_n>7$ donc $U_n-7>0$ et $U_n+18>25$

Donc $U_{n+1}-7=\frac{10(U_n-7)}{U_n+18}>0$

Donc $U_{n+1}-7>0$

D'où $U_n>7 \quad \forall n\in N$

b) Montrer que

$$U_{n+1}-U_n=\frac{(7-U_n)(U_n+8)}{U_n+18} \quad \forall n\in N$$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{17U_n+56}{U_n+18}-U_n$$

$$=\frac{17U_n+56-U_n^2-18U_n}{U_n+18}=\frac{-U_n^2-U_n+56}{U_n+18}$$

$$(7-U_n)(U_n+8)=7U_n+56-U_n^2-8U_n$$
$$=-U_n^2-U_n+56$$

D'où $U_{n+1}-U_n=\frac{(7-U_n)(U_n+8)}{U_n+18}\ ;\forall n\in N$

c) Montrer que la suite (U_n) est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle $[7;8]$

On a $U_{n+1}-U_n=\frac{(7-U_n)(U_n+8)}{U_n+18} \quad \forall n\in N$

On a $U_n>7$ donc $7-U_n<0$ et $U_n+8>15$

Et $U_n+18>25$

Donc $U_{n+1}-U_n=\frac{(7-U_n)(U_n+8)}{U_n+18}<0$

D'où la suite (U_n) est décroissante.

La suite (U_n) est décroissante et minorée.

D'où (U_n) est convergente

La suite (U_n) est décroissante Donc $U_n\le U_0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

donc $U_n\le 8 \quad \forall n\in\mathbb{N}$ et On a $U_n>7 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Donc $7<U_n\le 8 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Donc $7\le \lim U_n\le 8$ D'où la limite de (U_n) appartient à l'intervalle $[7;8]$

2) On pose: $V_n=\frac{U_n-7}{U_n+8} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ puis écrire V_n en fonction de n.

Montrons que $V_{n+1}=\frac{2}{5}V_n$? $\forall n\in\mathbb{N}$

On $V_n=\frac{U_n-7}{U_n+8}$ donc $V_{n+1}=\frac{U_{n+1}-7}{U_{n+1}+8}$

$$V_{n+1}=\frac{\frac{10(U_n-7)}{U_n+18}}{\frac{17U_n+56}{U_n+18}+8}=\frac{10(U_n-7)}{25U_n+200}=\frac{10(U_n-7)}{25(U_n+8)}$$

$$V_{n+1}=\frac{2(U_n-7)}{5(U_n+8)}=\frac{2}{5}\left(\frac{U_n-7}{U_n+8}\right)=\frac{2}{5}V_n$$

D'où $V_{n+1}=\frac{2}{5}V_n \quad \forall n\in N$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

De premier terme $V_0=\frac{U_0-7}{U_0+8}=\frac{8-7}{8+8}=\frac{1}{16}$

$V_n=V_0\left(\frac{2}{5}\right)^n$ donc $V_n=\frac{1}{16}\left(\frac{2}{5}\right)^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

b - Montrer que : $U_n=\frac{8(\left(\frac{2}{5}\right)^n+14)}{16-\left(\frac{2}{5}\right)^n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

puis Calculer lim U_n

$V_n=\frac{U_n-7}{U_n+8}\Leftrightarrow V_nU_n+8V_n=U_n-7$

$\Leftrightarrow 8V_n+7=U_n-V_nU_n$

$$\Leftrightarrow U_n=\frac{8V_n+7}{1-V_n}\Leftrightarrow U_n=\frac{8\frac{1}{16}\left(\frac{2}{5}\right)^n+7}{1-\frac{1}{16}\left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

D'où $U_n=\frac{8(\left(\frac{2}{5}\right)^n+14)}{16-\left(\frac{2}{5}\right)^n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

On a $\lim U_n=\lim\frac{8(\left(\frac{2}{5}\right)^n+14)}{16-\left(\frac{2}{5}\right)^n}=\frac{8(0+14)}{16-0}=7$

Car $\lim\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$ et $-1<\frac{2}{5}<1$ d'où $\lim U_n=7$

Exercice 4 :

4 (R) ; 2 (B) ; 3 (N)

On tire au hasard successivement et avec remise **trois** boules du sac.

$\mathbf{Card}(\Omega)=9^3=729$

1) Montrer que : $\mathbf{p(A)}=\frac{16}{81}$; $\mathbf{p(B)}=\frac{19}{27}$

A ″Les trois boules tirées sont de couleurs différentes deux à deux″

$\mathbf{Card(A)}=\frac{3!}{1!\times1!\times1!}(4^1\times2^1\times3^1)=6\times24$

$\mathbf{Card(A)}=144$

$\mathbf{P(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{144}{729}=\frac{16}{81}}$

B ″Il 'y a au moins une boule noires parmi les boules tirées″

Première méthode

$\overline{\mathbf{B}}$ ″Aucune boule noire parmi les trois boules tirées″

3 (N) ; 6($\overline{\mathbf{N}}$)

$\mathbf{Card}(\overline{\mathbf{B}})=6^3=216$ $(\overline{\mathbf{N}}\overline{\mathbf{N}}\overline{\mathbf{N}})$

$\mathbf{P(\overline{B})=\frac{Card(\overline{B})}{Card(\Omega)}=\frac{216}{729}=\frac{8}{27}}$

$\mathbf{p(B)}=1-\mathbf{P}(\overline{\mathbf{B}})=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$

$\mathbf{p(B)}=\frac{19}{27}$

Deuxième méthode

3 (N) ; 6($\overline{\mathbf{N}}$)

$(\mathrm{N}\overline{\mathbf{N}}\overline{\mathbf{N}})$ ou $(\mathrm{NN}\overline{\mathbf{N}})$ ou $(\mathrm{NN}\mathbf{N})$

$\mathbf{Card(B)}=\frac{3!}{(1!)\times2!}(3^1\times6^2+3^2\times6^1)+3^3=513$

$\mathbf{P(B)=\frac{Card(B)}{Card(\Omega)}=\frac{513}{729}=\frac{19}{27}}$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage fait correspondre le nombre de couleur des boules tirées.

a) Montrer que $\mathbf{P(X=2)}=\frac{54}{81}$

$(\mathrm{NN}\overline{\mathbf{N}})$ ou $(\mathbf{BB}\overline{\mathbf{B}})$ ou $(\mathbf{RR}\overline{\mathbf{R}})$

$\mathbf{Card}(\mathbf{X}=2)=\frac{3!}{(2!)\times1!}(3^2\times6^1+2^2\times7^1+4^2\times5^1)$

$\mathbf{Card}(\mathbf{X}=2)=486$

$\mathbf{P(X=2)=\frac{card(X=2)}{card(\Omega)}=\frac{486}{729}=\frac{2}{3}}$

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

$\mathbf{X=1}$ $(\mathbf{NNN})$ ou $(\mathbf{BBB})$ ou $(\mathbf{RRR})$;

$\mathbf{X=2}$ $(\mathrm{NN}\overline{\mathbf{N}})$ ou $(\mathbf{BB}\overline{\mathbf{B}})$ ou $(\mathbf{RR}\overline{\mathbf{R}})$

$\mathbf{X=3}$ $(\mathbf{NBR})$

On a $\mathbf{X}(\Omega)=\{1;2;3\}$

$\mathbf{P(X=3)=P(A)=\frac{16}{81}}$ $(\mathbf{NBR})$

$(\mathrm{NN}\mathbf{N})$ ou $(\mathbf{BBB})$ ou $(\mathbf{RRR})$

$\mathbf{Card}(\mathbf{X}=1)=3^3+2^3+4^3=99$

$\mathbf{P(X=1)=\frac{card(X=1)}{card(\Omega)}=\frac{99}{729}=\frac{11}{81}}$

Deuxième méthode

On sait que $\mathbf{P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1}$

Donc $\mathbf{P(X=1)=1-P(X=2)-P(X=3)}$

$\mathbf{P(X=1)=1-\frac{2}{3}-\frac{16}{81}=\frac{11}{81}}$

D'où $\mathbf{P(X=1)=\frac{11}{81}}$

k	1	2	3
P(X= k)	$\mathbf{\frac{11}{81}}$	$\mathbf{\frac{2}{3}}$	$\mathbf{\frac{16}{81}}$

(Remarque $\mathbf{\frac{11}{81}+\frac{2}{3}+\frac{16}{81}=1}$)

Problème :

I) On considère la fonction g définie sur $\mathbf{I}=\left]0;+\infty\right[$

par : $\mathbf{g(x)}=\frac{1}{\mathbf{x}}-(\ln\mathbf{x})^2-\ln\mathbf{x}-1$

1) Calculer g(1)

$\mathbf{g}(1)=\frac{1}{1}-(\ln1)^2-\ln1-1=1-1=0$

2) En déduire que $\mathbf{g(x)}\geq0$ $\forall\mathbf{x}\in\left]0;1\right]$ et

$\mathbf{g(x)}\leq0$ $\forall\mathbf{x}\in\left[1;+\infty\right[$

La courbe de g est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $\left]0;1\right]$

Donc $\mathbf{g(x)}\geq0$ $\forall\mathbf{x}\in\left]0;1\right]$

La courbe de g est en dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $\left[1;+\infty\right[$

Donc $\mathbf{g(x)}\leq0$ $\forall\mathbf{x}\in\left[1;+\infty\right[$

II) On considère la fonction f définie sur $\mathbf{I}=\left]0;+\infty\right[$

par : $\mathbf{f(x)}=-2\mathbf{x}+(1+\mathrm{x}-\mathrm{x}\ln\mathbf{x})\ln\mathbf{x}$

1) a) Montrer que $\lim_{\mathbf{x}\to0^+}\mathbf{f(x)=-\infty}$ et en déduire une interprétation géométrique du résultat.

$\lim_{\mathbf{x}\to0^+}\mathbf{f(x)}=\lim_{\mathbf{x}\to0^+}-2\mathbf{x}+(1+\mathrm{x}-\mathrm{x}\ln\mathbf{x})\ln\mathbf{x}=-\infty$

Car $\lim_{\mathbf{x}\to0^+}\mathrm{x}\ln\mathbf{x}=0$ et $\lim_{\mathbf{x}\to0^+}\ln\mathbf{x}=-\infty$

On a $\lim_{\mathbf{x}\to0^+}\mathbf{f(x)=-\infty}$ la droite d'équation x = 0 est une asymptote verticale à la courbe $(\mathbf{C_f})$

2) a) Vérifier que :

$\mathbf{f(x)}=\mathbf{x}\ln\mathbf{x}(\frac{-2}{\ln\mathbf{x}}+\frac{1}{\mathbf{x}}-\ln\mathbf{x}+1)$ $\forall\mathbf{x}\in\mathbf{I}$

$\mathbf{x}\ln\mathbf{x}(\frac{-2}{\ln\mathbf{x}}+\frac{1}{\mathbf{x}}-\ln\mathbf{x}+1)$

$=\mathbf{x}\ln\mathbf{x}\times\frac{-2}{\ln\mathbf{x}}+\ln\mathbf{x}-\mathbf{x}(\ln\mathbf{x})^2+\mathbf{x}\ln\mathbf{x}$

$=-2\mathbf{x}+\ln\mathbf{x}-\mathbf{x}(\ln\mathbf{x})^2+\mathbf{x}\ln\mathbf{x}$

$=-2\mathbf{x}+(1+\mathbf{x}-\mathbf{x}\ln\mathbf{x})\ln\mathbf{x}=\mathbf{f(x)}$

D'où $\mathbf{f(x)}=\mathbf{x}\ln\mathbf{x}(\frac{-2}{\ln\mathbf{x}}+\frac{1}{\mathbf{x}}-\ln\mathbf{x}+1)$ $\forall\mathbf{x}\in\mathbf{I}$

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

Puis en déduire une interprétation géométrique du résultat.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x(\frac{-2}{\ln x}+\frac{1}{x}-\ln x+1) = -\infty$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2}{\ln x}+\frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\ln x(\frac{-2}{\ln x}+\frac{1}{x}-\ln x+1)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x(\frac{-2}{\ln x}+\frac{1}{x}-\ln x+1) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

(C_f) admet au voisinage de + ∞ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

3) a) Montrer que $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in]0,+\infty[$

$f(x) = -2x + (1+x-x\ln x)\ln x$

$f'(x) = -2 + (1-\ln x-1)\ln x + (1+x-x\ln x)\frac{1}{x}$

$f'(x) = -2 - (\ln x)^2 + \frac{1}{x} + 1 - \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = g(x)$

D'où $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in]0,+\infty[$

b) Dresser le tableau des variations de f

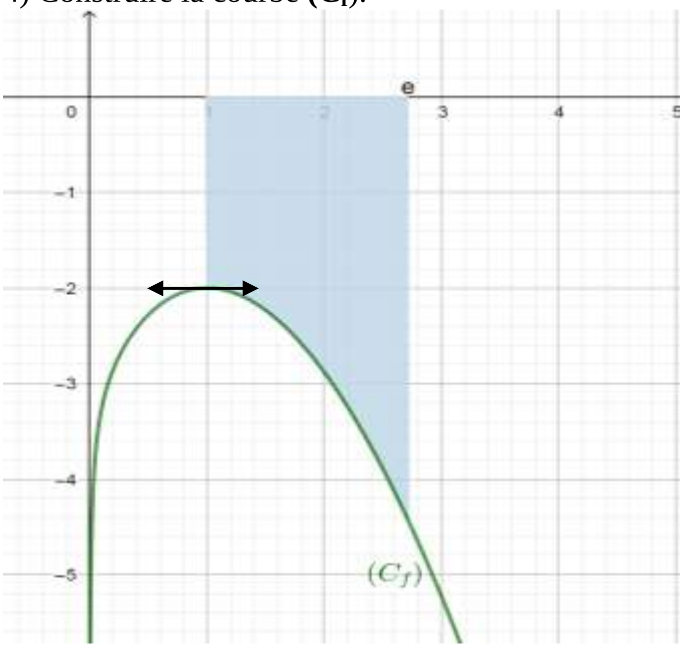
$f'(x) = g(x) \quad \forall x \in]0,+\infty[$

$g(x) \geq 0 \quad \forall x \in]0;1]$ Donc $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]0;1]$

et $g(x) \leq 0 \ \ \forall x \geq 1$ donc $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in [1;+\infty[$

x	0	1	$+\infty$
f′(x)	+	0	−
f(x)	$-\infty$ ↗	-2	↘ $-\infty$

4) Construire la courbe **(C_f)**.



5) Déterminer le nombre des solutions de l'équation :

$x \in]0,+\infty[\quad \ln(xe^3) = x\left[(\ln x)^2 - \ln x + 2\right]$

$\ln(xe^3) = x\left[(\ln x)^2 - \ln x + 2\right]$

$\Leftrightarrow \ln x + \ln e^3 = x(\ln x)^2 - x\ln x + 2x$

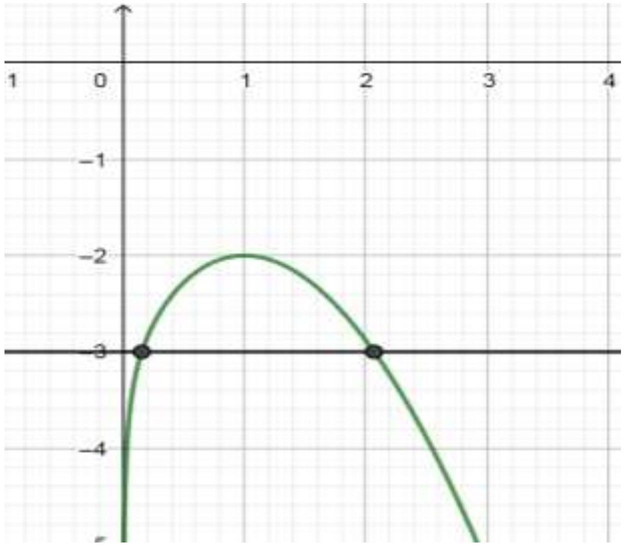
$\Leftrightarrow \ln x + 3 = x(\ln x)^2 - x\ln x + 2x$

$\Leftrightarrow -2x + \ln x + x\ln x - x(\ln x)^2 = -3$

$\Leftrightarrow f(x) = -3$

Le nombre des solutions de l'équation $f(x) = -3$ est égale aux nombre de point d'intersection entre la courbe (C_f) et la droite (D) d'équation y = – 3

La droite (D) coupe la courbe (C_f) en 2 points d'où l'équation $f(x) = -3$ admet 2 solutions



6) a) Montrer que $H : x \to \frac{x^2}{2}\left[(\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2}\right]$ est une primitive de $h : x \to x(\ln x)^2$ sur I puis montrer que $\int_1^e x(\ln x)^2 dx = \frac{e^2-1}{4}$

On a $H(x) = \frac{x^2}{2}\left[(\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2}\right]$

$H'(x) = h(x)$?

$H'(x) = x\left[(\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2}\right] + \frac{x^2}{2}\left(\frac{2\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right)$

$= x(\ln x)^2 - x\ln x + \frac{x}{2} + x\ln x - \frac{x}{2}$

$= x(\ln x)^2 = h(x)$ Donc $H'(x) = h(x)$

D'où $H : x \to \frac{x^2}{2}\left[(\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2}\right]$ est une primitive de $h : x \to x(\ln x)^2$ sur I

$\int_1^e x(\ln x)^2 dx = [H(x)]_1^e = H(e) - H(1)$

$= \frac{e^2}{2}(1 - 1 + \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} = \frac{e^2-1}{4}$

D'où $\int_1^e x(\ln x)^2 dx = \frac{e^2-1}{4}$

b) A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $\int_1^{e}(x+1)\ln x\,dx = \frac{e^2+5}{4}$

$u(x)=\ln x \qquad u'(x)=\frac{1}{x}$

$v'(x)=x+1 \qquad v(x)=\frac{1}{2}x^2+x$

$$\int_1^{e}(x+1)\ln x\,dx = \left[(\frac{1}{2}x^2+x)\ln x\right]_1^{e} - \int_1^{e}(\frac{1}{2}x^2+x)\frac{1}{x}dx$$

$$\int_1^{e}(x+1)\ln x\,dx = \frac{1}{2}e^2+e-\int_1^{e}(\frac{1}{2}x+1)dx$$

$$=\frac{1}{2}e^2+e-\left[\frac{1}{4}x^2+x\right]_1^{e} = \frac{1}{2}e^2+e-\frac{1}{4}e^2-e+\frac{5}{4}$$

D'où $\int_1^{e}(x+1)\ln x\,dx = \frac{e^2+5}{4}$

c) Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par (C_f) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

On a $\forall x \in I \ \ f(x)\le 0$ donc $A = (\int_1^{e}-f(x)dx)cm^2$

$$\int_1^{e}-f(x)dx = \int_1^{e}2x-(x+1)\ln x + x(\ln x)^2\,dx$$

$x \to x(\ln x)^2$, $x \to -(x+1)\ln x$ et $x \to 2x$ sont des fonctions continues sur I

$$\int_1^{e}-f(x)dx = \int_1^{e}2x\,dx-\int_1^{e}(x+1)\ln x\,dx+\int_1^{e}x(\ln x)^2dx \Leftrightarrow \int_1^{e}-f(x)dx = \left[x^2\right]_1^{e}-\frac{e^2+5}{4}+\frac{e^2-1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \int_1^{e}-f(x)dx = e^2-1+\frac{-e^2-5+e^2-1}{4}$$

Donc $\int_1^{e}-f(x)dx = e^2-\frac{5}{2}$

D'où $A = (e^2-\frac{5}{2})cm^2$