CALCULS INTEGRALES

PROF : ATMANI NAJIB **2ème BAC Sciences ex (pc-svt…)**

I) INTEGRATION D'UNE FONCTION CONTINUE.

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I ; et F une fonction primitive de f sur I. Le nombre $\boldsymbol{F(b)-F(a)}$ s'appelle l'intégrale de la fonction $\boldsymbol{f}$ entre $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ on écrit :

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$$

on lit somme $f(x)dx$ de $\boldsymbol{a}$ à $\boldsymbol{b}$ et on l'appelle intégrale de a à b.Le réel a s'appelle la borne inférieure de l'intégrale et le réel b s'appelle la borne supérieure **Remarque :** la variable t est une variable muette, on peut le changer par n'importe qu'elle variable

Propriété1 : Toute fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$ c'est-à-dire $\int_a^b f(x)dx$ existe et finie.

Propriété2 : Soient f, g et f' des fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c trois éléments de I et α un réel, on a

1) $\int_a^b f'(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$

2) $\int_a^b \alpha dx = [\alpha x]_a^b = \alpha(b-a)$ 3) $\int_a^a f(x)dx = 0$

4) $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (Relation de Chasles)

6) $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ (linéarité)

7) $\int_a^b (\alpha f)(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$ (linéarité)

Intégrales et ordre

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $a\in I$ et $b\in I$ et $a\le b$

1)Si f est positive sur [a ; b], alors $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

2) Si $(\forall x\in[a;b]);\ f(x)\le g(x)$ alors :

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

3) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

II) LA VALEUR MOYENNE ET THEOREME DE LA MEDIANE

si f est une fonction continues sur un intervalle I et $a\in I$ et $b\in I$ et $a\le b$ alors il existe au moins un réel c dans [a ; b].Tel que : $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ S'appelle La valeur moyenne de f Sur [a ; b]

III)TECHNIQUES DE CALCULS D'UNE INTEGRALE.

1) L'utilisation directe des fonctions primitives :

La fonction	Sa fonction primitive
$\alpha\ \ (\alpha\in\mathbb{R})$	$\alpha x + c$
$x^n\ \ (n\in\mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$
$x^r\ \ (r\in\mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}+c$
$sin(ax+b)$	$\frac{-1}{a}cos(ax+b)+c$
$cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}sin(ax+b)+c$
$\frac{a}{1+x^2}$	$a\times arctan(x)+c$

La fonction	Sa fonction primitive
$u'+v'$	$u+v+C^{te}$
$\alpha u'$	$\alpha u + C^{te}$
$u'u^n\ (n\in\mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+C^{te}$
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u}+C^{te}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}+C^{te}$
$u'\sqrt[n]{u}\ \ (n\in\mathbb{N}^*)$	$\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{u^{n+1}}+C^{te}$
$u'u^r\ (r\in\mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}+C^{te}$
$u'\times v'ou$	$vou+C^{te}$
$\frac{u'}{u^2+1}$	$arctan(u)+C$

La ligne en couleur gaune est une généralisation des 4 lignes précédentes.

2)Intégration par partie :

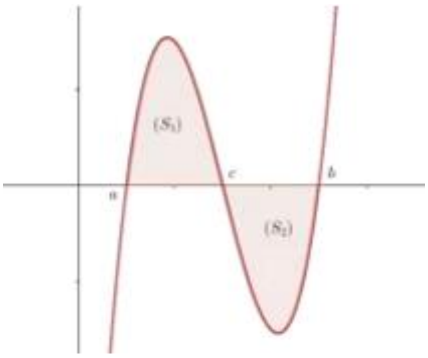
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et u' et v' sont continue sur I et soient a et b deux éléments de l'intervalle I on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

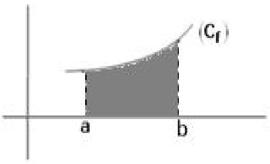
IV) INTEGRALE ET SURFACE.

1)Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b] l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine situé entre la courbe Cf, l'axe des abscisses et les droites d'équation :

x = a et x = b est : $A(\Delta_f) = \int_a^b |f(x)|dx \ \ ua$

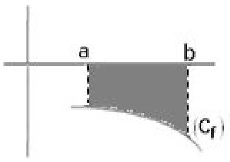


2)Si si f une fonction continue et positif sur [a ; b]



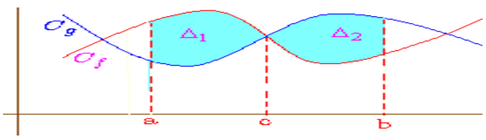
$$A(\Delta_f) = \int_a^b f(x)\,dx.ua$$

3) si f une fonction continue et négatif sur [a ; b]



$$A(\Delta_f) = -\int_a^b f(x)\,dx.ua$$

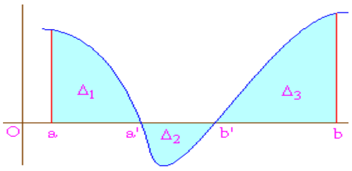
4)Si on a par exemple :



$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

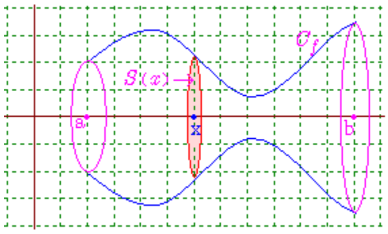
$$S = \int_a^c (f(x) - g(x))dx + \int_c^b (g(x) - f(x))dx$$

5) Si on a par exemple :



$$A(\Delta) = \int_a^{a'} f(x)dx + \int_{a'}^{b'} -f(x)dx + \int_{b'}^{b} f(x)dx$$

V) INTEGRALE ET CALCUL DES VOLUMES



Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

La rotation de la courbe (C_f) au tour de l'axe des abscisses engendre un solide de volume $V = \int_a^b \pi (f(x))^2\,dx$

$u.v$ (par unité de volume)

si le repere est : $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ $u.v = \|\vec{i}\|\|\vec{j}\|\|\vec{k}\|$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien