Probabilités

I) *Vocabulaires.*

- **aléatoire** = Lié au hasard **;** imprévisible ;arbitraire.
- On dit qu'une **expérience** est **aléatoire** si on peut déterminer parfaitement, par avance toutes les issues possibles mais on ne peut pas prévoir par avance, laquelle de ces issues sera réalisée.
- **L'univers Ω** est l'ensemble de tous les résultats possibles.
  Posons $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. (C'est-à-dire $card\Omega = n$)
- On appelle **événement** toute partie A de **Ω**.
- Un événement réduit à une seule issue $\{\omega_i\}$ est **un événement élémentaire**.
- **Ω** est appelé l'événement **certain**.
- $\varnothing$ est appelée l'événement **impossible**.
- Si A et B désignent deux événements de **Ω**, l'événement $A\cup B$ est réalisé si l'un au moins des événements A et B est réalisé.
- L'événement $A\cap B$ est réalisé si les événements A et B sont tous les deux réalisés.
- L'événement contraire d'un événement A, est $\overline{A}$ constitué des éléments de **Ω** n'appartenant pas à A.

Exemple : Lancer un dé à 6 faces et noter le chiffre apparent sur la face supérieure, est une expérience aléatoire :

- Il y a 6 issues possibles.
- L'univers de cette expérience est $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.
- A :« Le résultat est impair » est un événement qu'on peut exprimer en langage symbolique de la forme suivante $A = \{1;3;5\}$.
- B :« Le résultat est un multiple de **5** » , est on peut écrire $B = \{5\}$. Donc B est un événement élémentaire, mais « **5** » est une issue possible et B est un ensemble qui contint cette seule issue.

II) *Probabilité d'un événement.*

Définition : Pour certaines expériences aléatoires, sous certaines conditions, on peut déterminer en pourcentage ou par un quotient « **la chance** » qu'un événement a pour ce réaliser. Ce **nombre** s'appelle la **probabilité** de l'événement.

- La probabilité d'un événement A d'un univers fini **Ω** est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.
- Par exemple :Si $\Omega = \{\omega_1;\omega_2;\omega_3;...;\omega_n\}$ et $A = \{\omega_2;\omega_5;\omega_8\}$ alors : $p(A) = p(\{\omega_2\}) + p(\{\omega_5\}) + p(\{\omega_8\})$
- $p(\Omega) = 1$; $p(\varnothing) = 0$ et Pour tout événement A on a : $0 \le p(A) \le 1$

Propriétés

- Pour tous événements A et B on a : $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$.
- Pour tous événements **disjoints** ou **incompatibles** A, B on a : $p(A\cup B) = p(A) + p(B)$
- Pour tous événements deux a deux **disjoints** ou **incompatibles** A_1, $A_2 \dots A_n$ on a :
$$p(A_1\cup A_2\cup \dots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n).$$
- Pour tout événement A, $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

III) *Equiprobabilité.*

Définition : Dans une expérience aléatoire, si tous les événements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisée, on dit qu'on est dans une situation d'équiprobabilité. Donc : si $\Omega = \{\omega_1;\omega_2;\omega_3;...;\omega_n\}$

Alors $p(\{\omega_i\}) = \dfrac{1}{card\Omega}$; c'est-à-dire pour tous événement A on a : $p(A) = \dfrac{cardA}{card\Omega}$.

Remarque : Dans le cas de l'équiprobabilité la détermination d'une probabilité se ramène en générale à des problèmes de **dénombrement**.

Exemple : On lance un dé **équilibré** (non truqué) dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On s'intéresse à la probabilité de l'évènement : ***A* « le numéro de la face supérieure est multiple de 2 »**

on a : $A = \{2\,;4\,;6\}$ donc $p(A) = \dfrac{cardA}{card\Omega} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

IV) *Probabilité conditionnelle.*

Définition : Soit B un événement de l'ensemble Ω, tel que $P(B) \neq 0$.

On définit sur Ω une nouvelle probabilité, notée P_B, en posant, pour tout événement A, $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

On note $P_B(A) = P(A/B)$ qui se lit « **probabilité de *A* que *B* est réalisé** ».

Propriété : Soient A et B deux événements de l'ensemble Ω, tel que $P(B) \neq 0$.

Alors : $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$.

Définition : On dit que deux événements A et B sont indépendants **lorsque** . $P(A \cap B) = P(B) \times P(A)$.

Remarque **:** Ne pas confondre **indépendant** et **incompatible**

V) *Probabilités totales.*

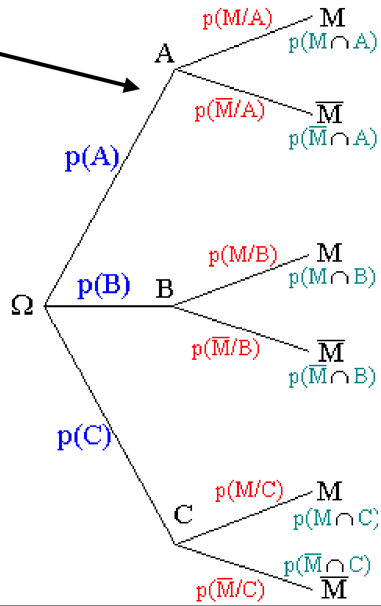
1) **Arbre de probabilité** : C'est un arbre sur lequel on place des probabilités conditionnelles d'événements, cette présentation permet de rendre plus simple le calcul de probabilité :

Remarque **:** Arbre probabiliste $\neq$ Arbre à dénombrer

Exemple

Soit p une probabilité sur un univers Ω et A, B et C trois évènements incompatibles et leur réunion est Ω

Soit un événement M, donc nous obtenons l'arbre probabiliste suivant :



Remarque : Un **arbre de probabilités** comporte des **nœuds** et des **branches**.

On applique les règles suivantes :

- la somme des probabilités marquées sur des branches issues d'un même nœud est égale à **1**,
- la probabilité d'un événement qui correspond à un chemin est le produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des branches aboutissant à cet événement.

Donc :

$$p(M) = p(M \cap A) + p(M \cap B) + p(M \cap C)$$
$$= p_A(M) \times p(A) + p_B(M) \times p(B) + p_C(M) \times p(C)$$

2) **Formule des probabilités totales.**

Théorème : Soit A_1, A_2, …, A_k, des événements de probabilité non nulle, réalisant une partition de l'univers Ω. Alors, pour tout événement B de ce même univers, on a :

$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \ldots\ldots + p(B \cap A_k)$$
$$= p_{A_1}(B) \times p(A_1) + p_{A_2}(B) \times p(A_2) + \ldots\ldots + p_{A_k}(B) \times p(A_k)$$

Exercice : On considère trois urnes respectivement notées U_1, U_2 et U_3. L'urne U_1 contient **une** boule rouge et **cinq** boules jaunes, l'urne U_2 contient **trois** boules rouges et **une** boule jaune, l'urne U_3 contient **une** boule rouge et **deux** boules jaunes.

On choisit une urne au hasard et on tire une boule de cette urne.

Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?

VI) *Variables aléatoires.*

Introduction : Une variable aléatoire est une variable dont la valeur est déterminée en fonction du résultat d'une expérience aléatoire.

__Activité__ : On lance **trois fois** de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne **2** points pour chaque résultat « **Pile** » et on perd 1 point pour chaque résultat « **Face** ».
L'ensemble des issues est **Ω = {PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF}** et il est de bon sens de choisir l'équiprobabilité sur **Ω**.
L'application $X : \Omega \to [0,1]$, qui, à chaque issue, associe le **gain** du joueur, prend les valeurs **– 3, 0 3** et **6**.

Pour chaque valeur, on peut considérer l'événement **(*X* = 3) = {PPF, PFP, FPP}** et lui associer sa probabilité $\frac{3}{8}$

On obtient ainsi une nouvelle **loi de probabilité** sur l'ensemble des gains : **$X(\Omega)$ ={- 3, 0, 3, 6}.**
On la nomme **loi de *X***.

gain x_i	$x_1 = -3$	$x_2 = 0$	$x_3 = 3$	$x_4 = 6$
$p(X = x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

Définition : soit ***X*** une variable aléatoire discrète, l'application ***p*** est dite loi de probabilité de ***X***,

définie par : $$\begin{aligned} P : X(\Omega) &\to [0,1] \\ x_i &\mapsto p(X = x_i) \end{aligned}$$

__Remarque__ : Si ***X*** est une variable aléatoire discrète et ***p*** sa loi de probabilité et $X(\Omega) = \{x_1 ; x_2 ; x_3 ; .....; x_n\}$

Alors : $\sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = 1$

Esperance mathématique :

On appelle espérance mathématique de ***X*** le nombre, noté ***E*(*X*),** définit par : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i)$

Variance et écart type :

- On appelle variance de ***X*** le nombre positif noté ***V*(*X*)** suivant :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) = E(X^2) - E(X)^2$$

- On appelle écart type de ***X*** le nombre positif noté $\sigma(X)$ suivant : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

VII) *Loi Binomiale.*

Définition : On réalise ***n*** fois successivement et d'une manière indépendante une expérience aléatoire qui a deux résultats possibles : **succès** de probabilité ***p*** et **échec** de probabilité **(*1-p*).**

Donc $(\forall k \in X(\Omega)) ;\ P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

X : nombre de succès obtenu est une variable aléatoire binomiale de paramètre ***n*** et ***p***.

Propriété :
Si ***X*** est une variable aléatoire binomiale de paramètre ***n*** et ***p***.
Alors :

$X(\Omega) = \{0;1;...;n\}$

$E(X) = np$

$V(X) = np(1-p)$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

__Quelques interprétations__

- ***E*(*X*)** est **la moyenne** des valeurs x_i, pondérées par les valeurs p_i.
- Dans le domaine des jeux (le terme « espérance » vient de là), ***E*(*X*)** est **le gain moyen** que peut espérer un joueur sur un grand nombre de parties.
  Cela permet de qualifier un jeu d'équitable (ou honnête) lorsque ***E*(*X*) = 0** ;
  lorsque *E*(*X*) > 0, le jeu est favorable au joueur, il lui est défavorable si ***E*(*X*) < 0**.
- La variance et l'écart-type sont des paramètres de **dispersion**.