Exercice 1 :

Déteminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

① - $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln(x+2)$;; ② - $f(x)=\ln\left(x^2-4\right)$;; ③ - $f(x)=\ln\left(2x^2-x+3\right)$

④ - $f(x)=\ln(3x+1)+\ln(x+2)$;; ⑤ - $f(x)=\ln\left[(3x+1)(x+2)\right]$

⑥ - $f(x)=\ln\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)$;; ⑦ - $f(x)=\dfrac{\ln(2x-1)}{\ln(x+1)}$;; ⑧ - $f(x)=\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$

Exercice 2 :

① - *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations suivantes :*

a - $\ln(2x-3)+\ln(x+1)=\ln 3$;; b - $\ln(2x+1)-2\ln(1-x)=0$

c - $\ln|x+2|-\ln|8x-1|=0$;; d - $(\ln x)^3+2(\ln x)^2-3\ln x=0$

②- *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les inéquations suivantes :*

a - $\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)\succ 0$;; b - $\ln\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)\prec 1$

c - $\dfrac{\ln x-1}{\ln x+1}\geq 0$;; d - $(\ln x)^2-\ln x-2\leq 0$

Exercice 3 :

Calculer les limites suivantes :

① - $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{3\ln x+1}{x}$;; ② - $\lim\limits_{x\mapsto 2}\dfrac{\ln(x-1)}{x-2}$;; ③ - $\lim\limits_{x\mapsto 0^+}\dfrac{\ln\left(x^2+x+1\right)}{x}$

④ - $\lim\limits_{x\mapsto 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\ln x\right)$;; ⑤ - $\lim\limits_{x\mapsto 0}\dfrac{\ln(x+1)-\ln(1-x)}{x}$;; ⑥ - $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{\ln\left(x^2+2\right)}{x+2}$

⑦ - $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{\ln(x+3)}{x^2+x+1}$;; ⑧ - $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}(\ln x)^2-x$;; ⑨ - $\lim\limits_{x\mapsto 0^+}x.(\ln x)^2$.

Exercice 4 :

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x)=x(\ln x-1)^2 & ;\ x\succ 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

① - *Déterminer* D_f *, puis calculer* $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}f(x)$.

②- *Etudier la continuité de la fonction f à droite en 0 .*

③- *Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite et interpréter le résultat géométriquement.*

④- *Etudier les variations de la fonction f .*

⑤- *Déterminer le point d'inflexion de la courbe* $(\mathscr{C}_f)$.

⑥- *Déterminer les branches infinies de la courbe* $(\mathscr{C}_f)$.

⑦- *Tracer la courbe* $(\mathscr{C}_f)$. *(on prend :* $e=2{,}7$ *et* $e^{-1}=0{,}4$ *)*

✍ Exercice 5 :

☺ 1ère partie :

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x-1-\ln x$

① - a – Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

b – Etudier les variations de la fonction g.

②- En déduire que : $g(x)\geq 0$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

☺ 2ème partie :

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=x^2-x\ln x & ; x\succ 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

① - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

② - a – Etudier la continuité de la fonction f à droite en 0 .

b – Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite et interpréter le résultat géométriquement.

③- Calculer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$, puis étudier la branche infinie de courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

④ - a – Montrer que : $\forall x\succ 0 \quad : \quad f'(x)=x+g(x)$

b – En déduire les variations de f sur D_f.

⑤ - a – Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est une tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point $A(1;1)$.

b – Etudier les positions relatives de $(\mathscr{C}_f)$ et la droite (Δ).

⑥ - a – Calculer $f''(x)$ pour tout $x\succ 0$.

b – Etudier la concavité de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et déterminer ce point d'inflexion.

⑦- Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

⑧- a - Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer .

b – Montrer que f^{-1} est dérivable sur J.

c – Calculer $(f^{-1})'(1)$.

d – Tracer $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

☺ 3ème partie :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$; $(\forall n\in\mathbb{N})$.

① - Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $\quad 0\leq u_n\leq 1$.

②- Montrer que la suite (u_n) est croissante.

③- Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite