

Table des matières

- I.** EXERCICE N° 1 : EQUATION DIFFERENTIELLE – FONCTION EXPONENTIELLE ET SUITE DE LA FORME $u_{n+1} = f(u_n)$
- II.** EXERCICE N° 2 : NOMBRES COMPLEXES .
- III.** EXERCICE N° 3 : PROBABILITE
- IV.** EXERCICE N° 4 : PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE ET PRODUIT VECTORIEL .

01

I. On considère l'équation différentielle suivante : (E) : $y'' - 2y' + y = 0$.

01. Résoudre l'équation (E) .

02. Déterminer la fonction h qui vérifie l'équation (E) et sa courbe passe par le point $O(0;0)$ et $h'(0) = -1$.

03. Vérifie que : la fonction $g(x) = 2 - xe^x$ vérifie l'équation (E₁) : $y'' - 2y' + y = 2$.

II. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 2 - xe^x$.

01. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

02. ...

a. Calculer g' la fonction dérivée de g sur \mathbb{R} ; puis donné le tableau de variation de g sur \mathbb{R} .

b. Montrer qu'il existe un réel unique α tel que $g(\alpha) = 0$ et $0,8 < \alpha < 0,9$.

c. On déduit que le signe $g(x)$ suivant les valeurs de x de \mathbb{R} .

III. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{2x+2}{e^x+2}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité de mesure est 2 cm) .

01. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis donner une inter présentation géométrique du résultat obtenue .

02. Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

03. Montrer que la courbe (C_f) de f admet une asymptote oblique la droite (Δ_1) au voisinage de $-\infty$ et déterminer son équation .

04. ..

a. Etudier la position relative de (C_f) et la droite (Δ_1) .

b. Etudier la position relative de (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y = x$.

05. ..

a. Montrer que : pour tout x de \mathbb{R} on a $f'(x) = \frac{2g(x)}{(2+e^x)^2}$.

b. On déduit le signe de $f'(x)$.

- c. Démontrer que : $f(\alpha) = \alpha$.
d. Dresser le tableau des variations de f .
e. Construire dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe (C_f) et les deux droites (Δ_1) et (Δ) .

06. On considère la fonction k la restriction de f sur $I = [-1; \alpha]$.

- a. Montrer que : k est une bijection de I vers J ; on détermine J .
b. Vérifier que : $k(0) = \frac{2}{3}$ puis déterminer $(k^{-1})'(\frac{2}{3})$.
c. Construire $(C_{k^{-1}})$ la courbe représentative de k^{-1} dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

IV. On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

01. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq \alpha$.

02. ..

- a. On utilise (C_f) et la droite (Δ) présenter sur l'axe des abscisses : u_0 et u_1 et u_2 .
b. Donner la conjoncture sur la monotonie de (u_n) .
c. Prouver la validité de la conjoncture .
d. On déduit que : (u_n) est convergente .
e. Déterminer la limite de (u_n) .

02

I. On considère l'équation suivante : $(E) : z \in \mathbb{C} , z^2 - 2z + 5 = 0$.

01. Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de (E) tel que $\text{Im}(z_1) > 0$.

02. On déduit la solution générale de l'équation différentielle suivante : $(E_1) : y'' - 2y' + 5y = 0$.

II. Soit le nombre complexe : $a = 1 + i(2 - \sqrt{3})$.

01. Montrer que : le module de a est $\sqrt{6} - \sqrt{2}$.

02. Vérifier que : $a = 2 \sin \frac{\pi}{6} + 2i \left(1 - \cos \frac{\pi}{6} \right)$.

03. ..

- a. θ est un nombre réel montrer que : $1 - \cos 2\theta = 2 \sin^2 \theta$ (on rappelle que $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$.
b. Montrer que : $a = 4 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} + 4i \sin^2 \frac{\pi}{12}$. (on rappelle que $\sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$) .

c. Montrer que $4\sin\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ et qui représente la forme trigonométrique de a puis on déduit la valeur de $\sin\frac{\pi}{12}$.

III. Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{u}, \vec{v})$; on considère les points A et B d'affixes respectivement $a = 1 + i(2 - \sqrt{3})$ et b . soit R la rotation de centre O origine du repère et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

01. Donner la forme trigonométrique de b l'affixe de B image de A par la rotation R .

03

Dans un laboratoire d'essais scientifiques un cage contient 5 lapins indiscernables au touche dont 2 lapins de la catégorie 2 et 2 lapins de la catégorie 5 et 1 lapin de la catégorie 4 .

I. On considère l'expérience suivante : un chercheur tire au hasard et simultanément deux lapins de la cage sachant que tous les lapins ont même probabilités d'être tirés .

01. Calculer probabilité de l'événement suivante C : « les 2 lapins tirés sont de même catégorie » .

02. Calculer probabilité de l'événement suivante D : « les 2 lapins tirés n'ont pas même parité de la catégorie » .

II. Soit la variable aléatoire X définie par « il associe à chaque tirage le produit des numéros de leurs catégories » .

01. Déterminer les valeurs de la variable aléatoire X .

02. Déterminer la loi de probabilité de X .

03. EsT ce que les événements C et $(X = 10)$ sont indépendants .

III. On répète l'expérience précédente quatre fois et à chaque fois on remet les lapins au cage avant de répété l'expérience .

01. Calculer la probabilité de l'événement K « l'événement C se réalise une fois et une seule lorsqu'on répète l'expérience quatre fois »

02. On considère la variable aléatoire Y définie par « le nombre de fois l'événement C est réalisé lorsqu'on répète l'expérience précédent quatre fois »

a. Comment on appelle la variable aléatoire Y et on précise ses paramètres .

b. Donner l'ensemble $Y(\Omega)$ (ensemble des valeurs de Y) .

c. Donner $p(Y = k)$ avec $k \in X(\Omega)$.

d. Calculer : l'espérance mathématique $E(Y)$; la variance $V(Y)$ et l'écart-type $\sigma(Y)$.

04

Pour déterminer deux questions à un examen d'orale ; l'étudiant tire au hasard deux cartes l'une après l'autre d'une boîte contenant 6 cartes qui concernent les questions de mathématique (on les désigne par m) et 4 cartes qui concernent les questions de la physique (on les désigne par p) ; on suppose que les cartes sont indiscernables au touche .

01. Compléter l'arbre de probabilités (ci- contre)

02. On considère les événements suivants :

A « les deux cartes tirées sont de la physique »

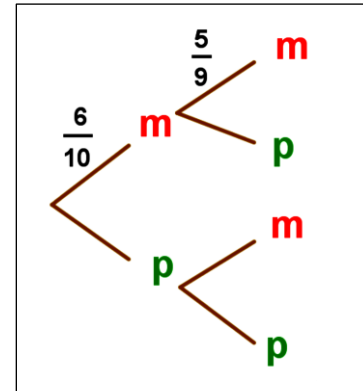
B « les deux cartes tirées ne sont pas de la même matière » .

Montrer que : $p(A) = \frac{2}{15}$ et $p(B) = \frac{8}{15}$.

03. On considère la variable aléatoire X définie par « il associe à chaque tirage de deux cartes le nombre de cartes de physique tirées »

a. Déterminer les valeurs de la variable aléatoire X .

b. Déterminer la loi de probabilité de X .



05

Dans l'espace (\mathcal{E}) est rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) on considère :

- Les deux points A(2,0,-1) et B(0,-3,4) et C(-1,2,0) .

01. ..

a. Montrer que : $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = -13\vec{i} - 13\vec{j} - 13\vec{k}$.

b. Est-ce que les points A et B et C sont alignés .

c. Déterminer les coordonnées du vecteur : $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$. Est-ce que les points A et B et C sont alignés .

d. On déduit qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x + y + z - 1 = 0$.

e. Calculer : la surface du triangle ABC .

02. ..

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par $\Omega(5,0,2)$ et orthogonale au plan (ABC) .

b. Vérifie que la projection orthogonale du point Ω sur le plan (ABC) est le point H(3,-2,0) .

c. Vérifie que la distance $r = \Omega H = 2\sqrt{3}$.

d. Déterminer l'équation cartésienne du sphère (S_1) de centre Ω et de rayon $r = \Omega H = 2\sqrt{3}$.

e. Déterminer la position relative du plan (ABC) et la sphère (S_1) .

03. Soit (S_2) l'ensemble des points M(x,y,z) de l'espace (\mathcal{E}) qui vérifie la relation suivante :

$(S_2) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 8y + 4z + 5 = 0$.

a. Déterminer la nature de (S_2) et ses éléments caractéristiques .

04. ..

a. Calculer la distance du point I(1,-4,-2) au plan (ABC) .

b. On déduit que le plan (ABC) coupe le sphère suivant un cercle (Γ) .

c. Déterminer R_Γ le rayon de (Γ) . Puis les coordonnées du point I_Γ centre de (Γ) .