Année scolaire : 2022 – 2023	Solutions des exercices de préparation à l'examen national 2023	AGOUZAL 2 BPCF – 2BSVT

Exercice 1 :

1) a) Montrer que (S) est la sphère de de rayon 5 et de centre $\Omega(-1;-2;1)$.

$(S): x^2+y^2+z^2+4x+2y-6z-11=0$

$a=\frac{4}{-2}$; $b=\frac{2}{-2}$; $c=\frac{-6}{-2}$; $d=-11$

$a=-2$; $b=-1$; $c=3$; $d=-11$

$a^2+b^2+c^2-d=4+1+9+11=25>0$

Donc le centre de (S) est $\Omega(-2;-1;3)$ et $R=\sqrt{25}=5$

D'où (S) est la sphère de centre $\Omega(-2;-1;3)$ et de rayon 5.

b) Vérifier que : $A\in(S)$?

$(S): x^2+y^2+z^2+4x+2y-6z-11=0$ $\quad A(1;-1;-1)$

$1^2+(-1)^2+(-1)^2+4(1)+2(-1)-6(-1)-11=13-13=0$

D'où $A\in(S)$

2) Soit (P) le plan passant par O et orthogonal à la droite (D)

a) Montrer que $2x+2y-z=0$ est une équation cartésienne du plan (P).

$(P)\perp(D)$ et $(D):\begin{cases}x=2t\\y=2t\,(t\in\mathbb{R})\\z=-t\end{cases}$

$\vec{n}(2;2;-1)$ est un vecteur directeur de (D) donc normal à (P).

Soit M(x ;y ;z)∈ (P)

Donc $(P): 2x+2y-z+d=0$ or $O(0;0;0)\in(P)$

Donc $2\times0+2\times0-0+d=0 \Leftrightarrow d=0$

D'où $(P): 2x+2y-z=0$

b) Calculer $d(\Omega;(P))$ puis déduire que (P) coupe (S) suivant un cercle (C) de rayon 4.

$(P): 2x+2y-z=0$ et $\Omega(-2;-1;3)$

$$d(\Omega,(P))=\frac{|2\times(-2)+2\times(-1)-3|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{9}{3}=3$$

D'où $d(\Omega,(P))=3$

On a $d(\Omega,(P))=3$ et $R=5$

Donc $d(\Omega,(ABC))<R$ $\qquad r=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$

Donc le plan (ABC) coupe la sphère selon un cercle (Γ) De rayon $r=4$

c) Ecrire une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonal à (P).

$(P)\perp(\Delta)$ $\vec{n}(2;2;-1)$ normal à (P) donc est un vecteur directeur de (Δ).

Soit M(x ;y ;z)∈ (Δ) $\quad \Omega(-2;-1;3)$

$(\Delta):\begin{cases}x=-2+2t\\y=-1+2t\,(t\in\mathbb{R})\\z=3-t\end{cases}$ une représentation paramétrique de la droite (Δ).

d) Montrer que (0, 1, 2) est le triplet de coordonnées du centre H du cercle (C).

Le centre H du cercle (C) est la projection orthogonale du point Ω sur le plan (P) c'est-à-dire le point d'intersection du plan (P) et la droite (Δ) passant par Ω est orthogonal au plan (P).

$(D)\cap(ABC)=\{H\}$?

Première méthode

$H(x;y;z)\in(D)\cap(P)$ équivaut à

$\begin{cases}x=-2+2t\\y=-1+2t\\z=3-t\\2x+2y-z=0\end{cases}$

$2(-2+2t)+2(-1+2t)-(3-t)=0$

Donc $-4+4t-2+4t-3+t=0 \Leftrightarrow 9t=9 \Leftrightarrow t=1$

$\begin{cases}x=-2+2(1)=0\\y=-1+2(1)=1\\z=3-1=2\end{cases}$ d'où $H(0;1;2)$

Deuxième méthode

$H\in(\Delta)\cap(P)$ équivaut à $H\in(\Delta)$ et $H\in(P)$

$H\in(\Delta)$ $\begin{cases}0=-2+2t\\1=-1+2t\\2=3-t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2=2t\\1+1=2t\\t=3-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\t=1\\t=1\end{cases}$

Donc $H\in(P)$ $\qquad (P): 2x+2y-z=0$

$H\in(P)$? $\quad 2(0)+2(1)-2=2-2=0$

Donc $H\in(P)$ or $(P)\perp(\Delta)$

D'où $(\Delta)\cap(P)=\{H(0;1;2)\}$

3) Soit (D′) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(4;2;3)$

a) Calculer $d(\Omega;(D'))$ et déduire que (D′) est tangente à (S)

On a $d(\Omega;(D'))=\dfrac{\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ $\quad A(1;-1;-1)$ $\quad \Omega(-2;-1;3)$

$\vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}$; $\|\vec{u}\|=\sqrt{4^2+2^2+3^2}=\sqrt{29}$

$$\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix}0&2\\-4&3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}3&4\\-4&3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3&4\\0&2\end{vmatrix}\vec{k}=8\vec{i}-25\vec{j}+6\vec{k}$$

$\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|=\sqrt{8^2+(-25)^2+6^2}=5\sqrt{29}$ or $\|\vec{u}\|=\sqrt{29}$

Donc $d(\Omega;(D'))=5$

On a $d(\Omega;(D'))=5$ et $R=5$ donc (D′) est tangente à (S)

b) Déterminer le point de tangence de (D′) et (S).

(D′) est tangente à (S) donc (D′) coupe (S) en un seule point.

On a $A\in(S)$ et $A\in(D')$ car (D′) passe par A.

D'où le point de tangence de (D′) et (S) est A.

Exercice 2 :

1) Résoudre dans C l'équation (E): $z^2-4\sqrt{3}z+16=0$

$\Delta=(4\sqrt{3})^2-4\times1\times16=48-64=-16$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1=\frac{4\sqrt{3}+4i}{2\times1}=2\sqrt{3}+2i \quad \text{et} \quad z_2=\overline{z_1}=2\sqrt{3}-2i$$

D'où $S=\left\{2\sqrt{3}-2i;2\sqrt{3}+2i\right\}$

2) a) Ecrire a sous forme trigonométrique et montrer que a^{21} est un imaginaire pur.

On a $a=2\sqrt{3}+2i$

$$|a|=\left|2\sqrt{3}+2i\right|=2\left|\sqrt{3}+i\right|=2\sqrt{3+1}=4$$

$$a=2\sqrt{3}+2i=4(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})=4(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$$

$$a=4(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$$

$$a=4e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$a^{21}=\left(4e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{21}=4^{21}e^{i\frac{21\pi}{6}}$$

$$a^{21}=4^{21}e^{i\frac{7\pi}{2}}=4^{21}e^{i\frac{8\pi}{2}-i\frac{\pi}{2}}=4^{21}e^{i4\pi}e^{-i\frac{\pi}{2}} \;;\; e^{i4\pi}=1$$

$$a^{21}=4^{21}(\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2}))$$

$$a^{21}=-4^{21}i$$

D'où a^{21} est un imaginaire pur.

b) Montrer que l'écriture complexe de la rotation R de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est :

$$z'=-iz-2(1+\sqrt{3})+2(\sqrt{3}-1)i$$

Soit z l'affixe du point M du plan et z′ l'affixe du point M′ image du point M par la rotation R. $b=-2+2i\sqrt{3}$

$$R(M)=M' \Leftrightarrow z'-b=e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-b)$$

$$\Leftrightarrow z'=-i(z+2-2i\sqrt{3})-2+2i\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow z'=-iz-2i-2\sqrt{3}-2+2i\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow z'=-iz-2(\sqrt{3}+1)+2(\sqrt{3}-1)i$$

D'où $z'=-iz-2(1+\sqrt{3})+2(\sqrt{3}-1)i$

c) Déduire que l'affixe de point C image du point A par la rotation R est : $c=-2\sqrt{3}-2i$

$$R(A)=C \Leftrightarrow c=-ia-2(\sqrt{3}+1)+2(\sqrt{3}-1)i$$

$$\Leftrightarrow c=-i(2\sqrt{3}+2i)-2(\sqrt{3}+1)+2(\sqrt{3}-1)i$$

$$\Leftrightarrow c=-2i\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}-2+2i\sqrt{3}-2i$$

$$\Leftrightarrow c=-2\sqrt{3}-2i$$

D'où $c=-2\sqrt{3}-2i$

3) Soit le point D d'affixe $d=2\sqrt{3}-6i$

a) Montrer que les points O, B et D sont alignés.

$$\frac{b-0}{d-0}=\frac{-2+2i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-6i}=\frac{(-1+i\sqrt{3})}{(\sqrt{3}-3i)}$$

$$\frac{b-0}{d-0}=\frac{(-1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+3i)}{(\sqrt{3})^2+3^2}=\frac{-\sqrt{3}-3i+3i-3\sqrt{3}}{12}$$

$$\frac{b-0}{d-0}=\frac{-4\sqrt{3}}{12}=\frac{-\sqrt{3}}{3}$$

On a $\frac{b-0}{d-0}=\frac{-\sqrt{3}}{3}\in\mathbb{R}$

D'où les points O, B et D sont alignés.

b) Montrer que $\frac{d-a}{c-a}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{d-a}{c-a}=\frac{2\sqrt{3}-6i-2\sqrt{3}-2i}{-2\sqrt{3}-2i-2\sqrt{3}-2i}=\frac{-8i}{-4\sqrt{3}-4i}$$

$$=\frac{2i}{\sqrt{3}+i}=\frac{2i(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\frac{2i\sqrt{3}+2}{4}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

D'où $\frac{d-a}{c-a}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) Déduire que $AD=AC$ et $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ puis donner la nature du triangle ACD.

On a $\frac{d-a}{c-a}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\frac{d-a}{c-a}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

$\left|\frac{d-a}{c-a}\right|=1$ et $\arg\frac{d-a}{c-a}\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$$\frac{|d-a|}{|c-a|}=1 \Leftrightarrow \frac{AD}{AC}=1 \Leftrightarrow AD=AC$$

Or $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})\equiv\arg\frac{d-a}{c-a}[2\pi]$ et $\arg\frac{d-a}{c-a}\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

d'où $AD=AC$ et $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

On a $AD=AC$ et $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

D'où ACD est un triangle équilatéral.

4) Montrer que (BD) est la médiatrice du segment $[AC]$

(BD) est la droite passant par le milieu de $[AC]$ et $(AC)\perp(BD)$. $a=2\sqrt{3}+2i$; $c=-2\sqrt{3}-2i$

$\frac{a+c}{2}=\frac{-2\sqrt{3}-2i+2\sqrt{3}+2i}{2}=0$ donc O est le milieu de $[AC]$ or les points O, B et D sont alignés.

Donc $O\in(BD)$

On a $R(A)=C$ donc $BA=BC$ et (BD) passe par le milieu de $[AC]$

d'où (BD) est la médiatrice du segment $[AC]$.

Exercice 3 :

6 (R) 6 (V) 3 (1) 9 (2)

On tire successivement et sans remise 2 boules du sac

1) Montrer que : $\mathbf{p(A)} = \frac{13}{22}$; $\mathbf{p(B)} = \frac{6}{11}$;

Calculer $\mathbf{p(C)}$.

$$\mathbf{Card}(\Omega) = \mathbf{A}_{12}^{2} = 132$$

A ″ Obtenir deux boules portant le même nombre″

3 (1) 9 (2)

$$\mathbf{Card(A)} = \mathbf{A}_3^2 + \mathbf{A}_9^2 = 78$$

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\mathbf{Card(A)}}{\mathbf{Card}(\Omega)} = \frac{78}{132} = \frac{13}{22}$$

B ″ Obtenir deux boules de couleurs différentes″

6 (R) 6 (V)

$$\mathbf{Card(B)} = 2(\mathbf{A}_6^1 \times \mathbf{A}_6^1) = 72$$

$$\mathbf{P(B)} = \frac{\mathbf{Card(B)}}{\mathbf{Card}(\Omega)} = \frac{72}{132} = \frac{6}{11}$$

C ″ Obtenir deux boules portant deux nombres dont la somme est 3″

3 (1) 9 (2)

$$\mathbf{Card(C)} = 2(\mathbf{A}_3^1 \times \mathbf{A}_9^1) = 54$$

$$\mathbf{P(C)} = \frac{\mathbf{Card(C)}}{\mathbf{Card}(\Omega)} = \frac{54}{132} = \frac{9}{22}$$

2) a) Montrer que : $\mathbf{p(A \cap B)} = \frac{3}{11}$

$$\mathbf{Card}(\mathrm{A} \cap \mathbf{B}) = 2(\mathbf{A}_3^1 \times \mathbf{A}_6^1) = 36$$

$$\mathbf{P}(\mathrm{A} \cap \mathbf{B}) = \frac{\mathbf{Card}(\mathrm{A} \cap \mathbf{B})}{\mathbf{Card}(\Omega)} = \frac{36}{132} = \frac{3}{11}$$

b) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

On a $\mathbf{p(A)} \times \mathbf{p(B)} = \frac{6}{11} \times \frac{13}{22} = \frac{39}{121}$ $\frac{39}{121} \neq \frac{3}{11}$

Donc $\mathbf{P}(\mathrm{A} \cap \mathbf{B}) \neq \mathbf{p(A)} \times \mathbf{p(B)}$

D’où A et B ne sont pas indépendants.

3) Sachant que l’événement B est réalisé, calculer la probabilité pour que les deux boules tirées portent le même nombre

$$\mathbf{P_B(A)} = \frac{\mathbf{P}(\mathrm{A} \cap \mathbf{B})}{\mathbf{P(B)}} = \frac{\frac{3}{11}}{\frac{6}{11}} = \frac{1}{2}$$

4) a) Déterminer les paramètres de la variable X

X est une variable aléatoire binomiale de paramètre 3 et P(B)

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et l’espérance mathématique de X.

$$\mathbf{P(X = k)} = \mathbf{C}_3^{\mathbf{k}}(\mathbf{P(B)})^{\mathbf{k}}(1 - \mathbf{P(B)})^{3-\mathbf{k}} \quad \mathbf{k} \in \{0;1;2;3\}$$

$$\mathbf{P(X = k)} = \mathbf{C}_3^{\mathbf{k}}\left(\frac{6}{11}\right)^{\mathbf{k}}\left(1 - \frac{6}{11}\right)^{3-\mathbf{k}} \quad \mathbf{k} \in \{0;1;2;3\}$$

$$\mathbf{P(X = k)} = \mathbf{C}_3^{\mathbf{k}}\left(\frac{6}{11}\right)^{\mathbf{k}}\left(\frac{5}{11}\right)^{3-\mathbf{k}} \quad \mathbf{k} \in \{0;1;2;3\}$$

k	0	1	2	3
P(X=k)	$\left(\frac{5}{11}\right)^3$	$\left(\frac{6}{11}\right)^2\frac{15}{11}$	$\frac{18}{11}\left(\frac{5}{11}\right)^2$	$\left(\frac{6}{11}\right)^3$

$$\mathbf{E(X)} = 3 \times \mathbf{P(B)} = 3 \times \frac{6}{11} = \frac{18}{11}$$

Problème :

I) On considère la fonction g définie sur

$\mathbf{I} =]0;+\infty[$ par : $\mathbf{g(x)} = \mathbf{x}^2 - \mathbf{x} + 1 - \ln \mathbf{x}$

1) a)Calculer $\lim_{\mathbf{x}\to 0^+} \mathbf{g(x)}$ et montrer $\lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \mathbf{g(x)} = +\infty$

$$\lim_{\mathbf{x}\to 0^+} \mathbf{g(x)} = \lim_{\mathbf{x}\to 0^+} \mathbf{x}^2 - \mathbf{x} + 1 - \ln \mathbf{x} = +\infty$$

Car $\lim_{\mathbf{x}\to 0^+} \ln \mathbf{x} = -\infty$

$$\lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \mathbf{g(x)} = \lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \mathbf{x}^2 - \mathbf{x} + 1 - \ln \mathbf{x}$$

$$= \lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \mathbf{x}\left(\mathbf{x} - 1 + \frac{1}{\mathbf{x}} - \frac{\ln \mathbf{x}}{\mathbf{x}}\right) = +\infty$$

Car $\lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \frac{\ln \mathbf{x}}{\mathbf{x}} = 0$ et $\lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \frac{1}{\mathbf{x}} = 0$ et $\lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \mathbf{x} = +\infty$

b) Montrer que $\mathbf{g'(x)} = \frac{(\mathbf{x}-1)(2\mathbf{x}+1)}{\mathbf{x}}$ $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{I}$

$$\mathbf{g(x)} = \mathbf{x}^2 - \mathbf{x} + 1 - \ln \mathbf{x}$$

$$\mathbf{g'(x)} = 2\mathbf{x} - 1 - \frac{1}{\mathbf{x}} = \frac{2\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} - 1}{\mathbf{x}} = \frac{(\mathbf{x}-1)(2\mathbf{x}+1)}{\mathbf{x}}$$

$$(\mathbf{x}-1)(2\mathbf{x}+1) = 2\mathbf{x}^2 + \mathbf{x} - 2\mathbf{x} - 1 = 2\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} - 1$$

D’où $\mathbf{g'(x)} = \frac{(\mathbf{x}-1)(2\mathbf{x}+1)}{\mathbf{x}}$ $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{I}$

2) a) Dresser le tableau de variations de g sur **I**

$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{I}$ le signe de $\mathbf{g'(x)}$ est celui de x – 1

$\forall \mathbf{x} \geq 1$ $\mathbf{x} - 1 \geq 0$ et $\forall \mathbf{x} \leq 1$ $\mathbf{x} - 1 \leq 0$

x	0		1		$+\infty$
g′(x)		–	0	+	
g(x)	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

b) Déduire que $\mathbf{g(x)} > 0$ $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{I}$

g(1) est le minimum de g sur I

Donc $\mathbf{g(x)} \geq \mathbf{g}(1)$ $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{I}$ or g(1) = 1

D’où $\mathbf{g(x)} > 0$ $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{I}$

II) On considère la fonction f définie sur

$\mathbf{I} =]0;+\infty[$ par : $\mathbf{f(x)} = \mathbf{x} + \frac{\ln \mathbf{x}}{\mathbf{x}} - \ln \mathbf{x}$

$$\lim_{\mathbf{x}\to 0^+} \mathbf{f(x)} = \lim_{\mathbf{x}\to 0^+} \mathbf{x} + \ln \mathbf{x}\left(\frac{1}{\mathbf{x}} - 1\right) = -\infty$$

Car $\lim_{\mathbf{x}\to 0^+} \ln \mathbf{x} = -\infty$ et $\lim_{\mathbf{x}\to 0^+} \left(\frac{1}{\mathbf{x}} - 1\right) = +\infty$

D'où $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ la droite d'équation x = 0

Est une asymptote verticale à la courbe (C).

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)+\frac{\ln x}{x} = +\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)+\frac{\ln x}{x}}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\frac{\ln x}{x} = 1$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = +\infty$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

c) Montrer que la courbe (C_f) admet au voisinage de + ∞ une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation y = x

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} x+\frac{\ln x}{x}-\ln x - x$$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} - \ln x = -\infty$ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = -\infty$

D'où la courbe (C_f) admet au voisinage de + ∞ une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation y = x

2) a) Dresser le tableau de signes de (1 – x)lnx

x	0		1		+∞
1 – x	‖	+	0	–	
lnx	‖	–	0	+	
(1 – x)lnx	‖	–	0	–	

D'où $(1-x)\ln x \le 0 \quad \forall x \in I$

b) Déduire que $f(x) \le x \quad \forall x \in I$

$$f(x) = x+\frac{\ln x}{x}-\ln x \Leftrightarrow f(x)-x = \frac{\ln x}{x}-\ln x$$

$$\Leftrightarrow f(x)-x = \frac{(1-x)\ln x}{x}$$

Le signe de f(x) – x et celui de (1 – x)lnx $\forall x \in I$

Or $(1-x)\ln x \le 0 \quad \forall x \in I$

donc $f(x) - x \le 0$

D'où $f(x) \le x \quad \forall x \in I$

3) a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \quad \forall x \in I$ puis f est strictement croissante sur I

On a $f(x) = x+\frac{\ln x}{x}-\ln x$

$$f'(x) = 1+\frac{1-\ln x}{x^2}-\frac{1}{x} = \frac{x^2-x+1-\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

D'où $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \quad \forall x \in I$

0n a $g(x) > 0 \quad \forall x \in I$ donc $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$

D'où f est strictement croissante sur I

b) Montrer que la droite (Δ) est la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1

On a $y = f'(1)(x-1)+f(1) \quad f(1) = 1$ et $f'(1) = 1$

Donc $y = x-1+1 = x$

D'où la droite (Δ) est la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\left]\frac{1}{2};1\right[$

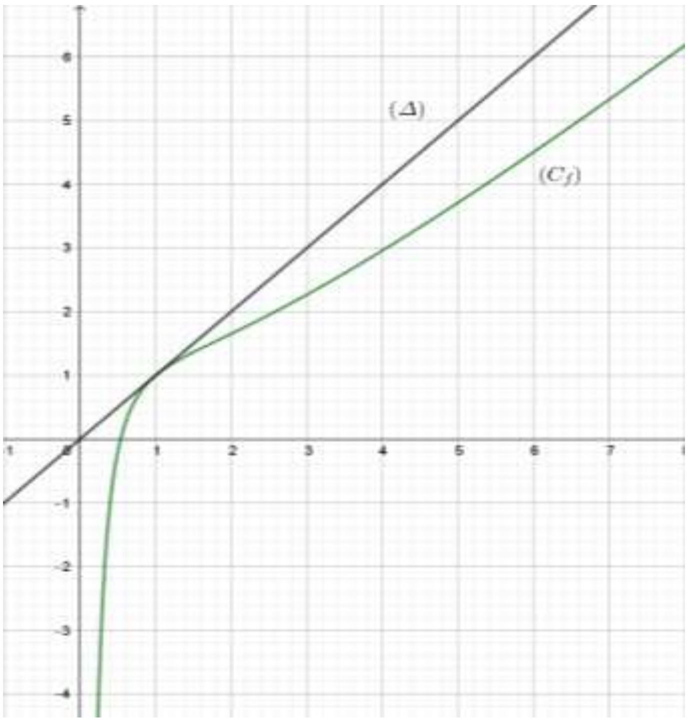
f est continue et strictement croissante sur I en particulier sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$ $f(1) = 1$ et

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}+\frac{\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}-\ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2}-2\ln 2+\ln 2 = \frac{1}{2}-\ln 2$$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}-\ln 2 < 0$ donc $f\left(\frac{1}{2}\right)f(1) < 0 \quad \ln 2 \approx 0,7$

D'où l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\left]\frac{1}{2};1\right[$

d) Construire la droite (Δ) et la courbe (C_f).



4) a) Montrer que : $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}$ et à l'aide d'une intégration par parties montrer que : $\int_1^e \ln x dx = 1$

$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^e (\ln x)'(\ln x)dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e$

$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}(\ln e)^2 = \frac{1}{2}$

$\int_1^e \ln x dx = 1$?

$u(x) = \ln x \qquad u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = 1 \qquad v(x) = x$

$\int_1^e \ln x dx = [x\ln x]_1^e - \int_1^e 1 dx = e\ln e - [x]_1^e$

$\int_1^e \ln x dx = e - e + 1$

D'où $\int_1^e \ln x dx = 1$

c) Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par (C_f) , la droite (Δ) et les droites d'équations x = 1 et x = e

$A = (\int_1^e |f(x) - x| dx) cm^2$

On a $f(x) \leq x \quad \forall x \in [1;+\infty[$ et $f(x) - x \leq 0$

$\int_1^e |f(x) - x| dx = \int_1^e x - f(x) dx = \int_1^e (\ln x - \frac{\ln x}{x})dx$

$\int_1^e (\ln x - \frac{\ln x}{x})dx = \int_1^e \ln x dx - \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

car $x \to \ln x$ et $x \to \frac{\ln x}{x}$ sont continues sur $[1;e]$

Donc $\int_1^e (\ln x - \frac{\ln x}{x})dx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

D'où $A = \frac{1}{2} cm^2$

5) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} Définie sur $\mathbb{R}$

f est continue et strictement croissante sur I donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur f(I)

Donc $f(I) = \mathbb{R}$

D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} Définie sur $\mathbb{R}$

b) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 1 puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(1)$ f(1) = 1

On a f est dérivable sur I donc f est dérivable en 1

On a $f'(1) = 1$ donc $f'(1) \neq 0$ d'où f^{-1} est dérivable en f(1) = 1 $\qquad f(1) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 1$

d'où f^{-1} est dérivable en 1

$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(1)} = 1$

d'où $\left(f^{-1}\right)'(1) = 1$

c) Montrer que $f^{-1}\left(\frac{2022}{2023}\right) < 1$

Première méthode

On a f est strictement croissante sur I et f^{-1} sa fonction réciproque donc f^{-1} strictement croissante sur $\mathbb{R}$

On a

$\frac{2022}{2023} < 1 \Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{2022}{2023}\right) < f^{-1}(1) \Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{2022}{2023}\right) < 1$

Car $f(1) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 1$

Deuxième méthode

On a f est strictement croissante sur I et f^{-1} sa fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$

Donc $f^{-1}\left(\frac{2022}{2023}\right) < 1 \Leftrightarrow f\left[f^{-1}\left(\frac{2022}{2023}\right)\right] < f(1)$

$\Leftrightarrow \frac{2022}{2023} < 1$

Car $f\left(f^{-1}(x)\right) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

D'où $f^{-1}\left(\frac{2022}{2023}\right) < 1$

6) On considère la suite (U_n) définie par :

$U_{n+1} = f(U_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ et $U_0 = \frac{23}{22}$

a) Montrer que : $U_n > 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour n = 0 on a $U_0 = \frac{23}{22}$ donc $U_0 > 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n > 1$ et montrons que $U_{n+1} > 1$

On a f est strictement croissante sur I et $U_n > 1$

$U_n > 1 \Leftrightarrow f(U_n) > f(1) \Leftrightarrow U_{n+1} > 1$

D'où $U_n > 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

On a $f(x) \leq x \qquad \forall x \in]0;+\infty[$

Or $U_n > 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc $f(U_n) \leq U_n$ donc $U_{n+1} \leq U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

D'où la suite (U_n) est décroissante.

c) Déduire que la suite (U_n) est convergente puis Calculer sa limite.

On a la suite (U_n) est décroissante et minorée

D'où la suite (U_n) est convergente

(U_n) est convergente donc sa limite est une solution de l'équation $f(x) = x$ or on sait que

$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$

$f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \frac{(1-x)\ln x}{x} = 0 \qquad \forall x \in]0;+\infty[$

$f(x) - x = 0 \Leftrightarrow (1-x)\ln x = 0$

$\Leftrightarrow (1-x) = 0$ ou $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 1$

D'où $\lim U_n = 1$

Méthode graphique

la courbe (C_f) coupe la droite (Δ) en un seule point de coordonnées (1 ; 1) donc l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution **x = 1** D'où $\lim U_n = 1$