| Année scolaire : 2022 – 2023 | Examen national 2014 2$^{ième}$ session | AGOUZAL<br>2 BPCF |
| --- | --- | --- |

**Exercice 1 : (2014 S2) (3pts)**

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ le point A(0, 0, 1), le plan (P) tel que :

(P) : 2x + y – 2z – 7 = 0 et la sphère (S) de centre $\Omega(0, 3,-2)$ et de rayon $R = 3$

1) a – Montrer que $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1-2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et perpendiculaire au plan (P).

b) Vérifier que H(2, 1, – 1) est le point d'intersection de (P) et (Δ)

2) a) posons $\vec{u} = 2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$, montrer que : $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u} = 3(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})$

b) Montrer que : $d(\Omega;(\Delta)) = 3$

c) En déduire que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) et vérifier que H est le point de tangence entre (Δ) et (S).

**Exercice 2 : (2014 S2) (3pts)**

Soit la suite $(U_n)$ définie par :

$$U_{n+1} = \frac{5U_n - 4}{1+U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad U_1 = 5$$

1) Montrer que : $U_n > 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

2) On pose $V_n = \dfrac{3}{U_n - 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que $V_{n+1} = \dfrac{1+U_n}{U_n - 2}$, en déduire que $(V_n)$ est une suite arithmétique de raison 1

b) Ecrire $V_n$ en fonction de n, en déduire que :

$$U_n = 2 + \frac{3}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

c) Déterminer $\lim U_n$

**Exercice 3 : (2014 S2)** (3pts)

Pour déterminer les deux questions d'un concours de Recrutement, un candidat tire, successivement et sans remise deux fiches d'un sac contenant dix fiches : 8 fiches concernant les maths et 2 fiches concernant la langue française.

On considère les deux événements suivants:

A ″ Tirer deux fiches concernant la langue française ″

B ″ Tirer deux fiches concernant deux matières différentes″.

Montrer que Montrer que : $P(A) = \dfrac{1}{45}$ et $P(A) = \dfrac{16}{45}$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage fait correspondre le nombre de fiches de la langue française tirées.

a) Vérifier que les valeurs prises par X sont 0, 1 et 2.

b) Montrer que $p(X = 0) = \dfrac{28}{45}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

**Exercice 4 : (2014 S2) (3 pts)**

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 - 4Z + 5 = 0$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A , B , C, D et Ω d'affixes respectives $a = 2+i$ ; $b = 2-i$ ; $c = i$ ; $d = -i$ et $\omega = 1$

a) Montrer que $\dfrac{a-\omega}{b-\omega} = i$

b) En déduire que le triangle ΩAB est rectangle et isocèle en Ω.

2) Soient z l'affixe du point M du plan et z′ l'affixe du point M′ image du point M par la rotation R de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a) Montrer que $z' = iz + 1 - i$.

b) Vérifier que $R(A) = C$ et $R(D) = B$

c) Montrer que les points A , B , C et D appartiennent au même cercle dont on déterminera le centre.

**Problème : (2014 S2) (8pts)**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (xe^x - 1)e^x$$

**(C)** est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 2 cm)

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et interpréter le résultat géométriquement.

2) a) Montrer que: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

b) En déduire que (C) admet une branche parabolique au voisinage de +∞ dont on précisera la direction.

3) a) Montrer que $f'(x) = e^x(e^x - 1 + 2xe^x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Et vérifier que $f'(0) = 0$

b) Montrer que : $e^x - 1 \geq 0 \quad \forall x \in [0;+\infty[$ et

$e^x - 1 \leq 0 \quad \forall x \in ]-\infty;0]$

c) Montrer que f est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0]$ puis dresser le tableau de variation de f sur R.

4) a) Montrer que l'équation f(**x**)=0 admet une solution unique **α** dans l'intervalle $[0;+\infty[$ et que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$

(on admet $\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} < 1$)

b) Construire la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. (On admet que la courbe **(C)** admet un point d'inflexion unique dont les coordonnées ne sont pas demandées).

5) A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx = \frac{1}{4}$$

6) Calculer en cm$^2$ l'aire du domaine limité par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et $x = \dfrac{1}{2}$