Dérivabilité et étude des fonction (série n°2)

Exercice 1 :

☺ 1ère partie :

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie par: $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-4}+x}{x}$.

① - a - *Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.*

b - *Trouver les limites de f aux bornes des intervalles de l'ensemble de définition D_f.*

② - *Etudier les branches infinie de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.*

③ - *Montrer que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet un centre de symétrie $\Omega(0,1)$.*

④ - *Etudier la dérivabilité de f en 2 à droite et interpréter le résultat géométriquement.*

⑤ - *Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in D_f$.*

☺ 2ème partie :

Soit g la fonction numérique d'une variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} g(x)=f(x) & ; \quad x\in\left]-\infty;-2\right]\cup\left[2;+\infty\right[\\ g(x)=\sqrt{4-x^2}+1 & ; \quad x\in\left]-2;2\right[\end{cases}.$$

① - a - *Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g.*

b - *Montrer que la restriction de g à l'intervalle $\left]-2;2\right[$ est une fonction paire.*

② - *Montrer que la fonction g est continue en 2.*

③ - *Etudier la dérivabilité de g en 2 à gauche et interpréter le résultat géométriquement.*

④ - *Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\left]-2;2\right[$.*

⑤ - *Dresser le tableau de variation de g.*

⑥ - *Tracer $(\mathscr{C}_g)$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.*

☺ 3ème partie :

Soit h restriction de g à l'intervalle $\left[2;+\infty\right[$.

① - *Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.*

② - *Montrer que la fonction h^{-1} est dérivable sur J.*

③ - *Dresser le tableau de variation de h^{-1}.*

④ - *Tracer $(\mathscr{C}_{h^{-1}})$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.*

⑤ - *Calculer $(\forall x\in J)$: $h^{-1}(x)$.*

Exercice 2 :

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie par: $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}$

① - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f, et calculer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$.

② - Calculer les limites suivantes et interpréter les résultats géométriquement :

$$\lim_{x\mapsto1^+}\frac{f(x)}{x-1} \quad et \quad \lim_{x\mapsto1^-}\frac{f(x)}{x-1} \quad et \quad \lim_{x\mapsto-2^+}\frac{f(x)}{x-2}.$$

③ - a - Etudier la dérivabilité de la fonction f sur $D_f-\{1\}$.

b - Calculer $f^{'}(x)$ pour tout $x\in D_f-\{1\}$.

c - Etudier les variations de f.

⑤ - Etudier les branches infinie de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

⑥ - Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.(On prends $\sqrt[3]{2}\approx1,25$ et $\sqrt[3]{4}\approx1,6$).

Exercice 3 :

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie par: $f(x)=x-1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-1}$

① - a - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

b - Trouver les limites de f aux bornes des intervalles de l'ensemble de définition.

② - a - Montrer (Δ) d'équation $y=x-1$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

b - Etudier les positions relatives de $(\mathscr{C}_f)$ et la droite (Δ).

③ - Etudier la dérivabilité de g en 0 à droite et interpréter le résultat graphiquement.

④ - Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in D_f$, puis Dresser le tableau de variation de f.

⑤ - Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α tel que $2\sqrt{2}\prec\alpha\prec\dfrac{27}{8}$.

⑥ - Soit g restriction de f à l'intervalle $]1;+\infty[$.

a - Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera .

b - Montrer que : $g^{-1}(6)=8$.

c - Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable au point $y_0=6$.

d - Calculer $(g^{-1})'(6)$.

⑥ - Tracer $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$ et (Δ) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

idrissi405@gmail.com