المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
جهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية السعادة التأهيلية
أيت ملول

Les Nombres Complexes

1 Introduction

—

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$; i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$; $\mathbb{C} = \{(x;y) \in \mathbb{R}; x+iy\}$

Les trois types d'écriture d'un nombres complexes Z:

♣ **écriture algébrique:** $Z = x + iy$
$\hookrightarrow x = Re(Z)$ est partie réel de nombre complexe Z;
$\hookrightarrow y = Im(Z)$ est partie imaginaire de nombre complexe Z;
♣ **écriture trigonométrique:** $Z = |Z|.(cos(\theta) + isin(\theta))$ ou $Z = [|Z|;\theta]$
$\hookrightarrow |Z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{Z\overline{Z}}$; $\overline{Z} = x - iy$;($\overline{Z}$ est le conjugué de Z)
$\hookrightarrow \arg(Z) \equiv \theta[2\pi]$
$\hookrightarrow \cos(\theta) = \dfrac{x}{|Z|}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{y}{|Z|}$
♣ **écriture exponentielle:** $Z = |Z|.e^{i\theta}$
$\hookrightarrow e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$

propriétés

Les Réglés de conjugué

$* \ \overline{Z+Z'} = \overline{Z} + \overline{Z'}$ $\quad * \ \overline{ZZ'} = \overline{Z}\,\overline{Z'}$ $\quad * \ \overline{\left(\dfrac{Z}{Z'}\right)} = \dfrac{\overline{Z}}{\overline{Z'}} / Z' \neq 0$ $\quad * \ \overline{Z^n} = (\overline{Z})^n / n \in \mathbb{N}^*$

Propriété de modulo

$* \ |ZZ'| = |Z||Z'|$ $\quad * \ \left|\dfrac{Z}{Z'}\right| = \dfrac{|Z|}{|Z'|}$ $\quad * \ |Z^n| = |Z|^n ; n \in \mathbb{N}^*$ $\quad * \ |Z+Z'| \leq |Z| + |Z'|$

Propriété d'argument

$* \ arg(ZZ') \equiv arg(Z) + arg(Z')[2\pi]$ $\quad * \ arg(\overline{Z}) \equiv -arg(Z)[2\pi]$

$* \ \arg\left(\dfrac{Z}{Z'}\right) \equiv arg(Z) - arg(Z')[2\pi]$ $\quad * \ arg\left(\dfrac{1}{Z}\right) \equiv -arg(Z)[2\pi]$

$* \ arg(Z^n) \equiv n \times arg(Z)[2\pi] / n \in \mathbb{N}^*$

Propriété sur la formule trigonométrique $Z = [|Z|;\alpha]$ **et** $Z' = [|Z'|;\alpha']$

$* \ Z \times Z' = [|Z||Z'|; \alpha + \alpha']$ $\quad * \ Z^n = [|Z|^n; n \times \alpha]$ $\quad * \ \dfrac{Z}{Z'} = \left[\dfrac{|Z|}{|Z'|}; \alpha - \alpha'\right]$

Propriété sur l'écriture exponentielle $Z = r.e^{i\alpha}$ **et** $Z' = r'.e^{i\alpha'}$

$* \; Z \times Z' = rr'.e^{i(\alpha+\alpha')}$ $\qquad * \; Z^n = r^n.e^{i(n\times\alpha)}$ $\qquad * \; \dfrac{Z}{Z'} = \dfrac{r}{r'}.e^{i(\alpha-\alpha')}$

2 Formule d'Euler ,Formule de Moivre

propriétés

♣ Formule d'Euler: $(cos(\theta)+i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$; $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ $(n \in \mathbb{N})$

♣ Formule de Moivre: $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$; $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

3 Interprétation géométrique

.

A , B *et* C des points dans le plan complexe avec d'affixe respectivement $Z_A Z_B$ *et* Z_C

$\overrightarrow{AB} = Z_B - Z_A$; $AB = |Z_B - Z_A|$; $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv arg\left(\dfrac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\right)[2\pi]$

A,B et C des points alignée $\Leftrightarrow \left(\dfrac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\right) \in \mathbb{R}$

4 L'équation $aZ^2+bZ+c=0$ avec a , b et c des réel $a \neq 0$

Propriétés

le discriminent: $\Delta = b^2 - 4ac$

$*$ Si $\Delta > 0$: $Z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $Z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$*$ Si $\Delta < 0$: $Z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$; $Z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

$*$ Si $\Delta = 0$: $Z = \dfrac{-b}{2a}$

5 l'ensemble des points $M(Z)$

Propriétés

Algébriquement	Géométriquement	L'ensemble des points $M(z)$
$\lvert Z_M - Z_A\rvert = \lvert Z_M - Z_B\rvert$	$AM = BM$	(Δ) est médiatrice de $[AB]$
$\lvert Z_M - Z_A\rvert = R$	$AM = R$	
Z est un nombre réel		
Z est un nombre imaginaire pur		